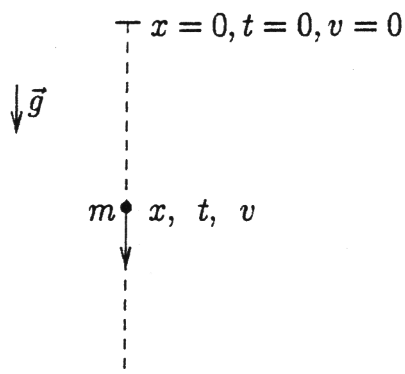
Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2004/2005 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Mechanica 2 (NS-350b)
november 2004

Opgave 1: Wrijving kwadratisch met de snelheid

Een naar beneden vallende massa m, van zeer grote hoogte op tijdstip nul uit startpunt nul met snelheid nul losgelaten, ondervindt door de luchtweerstand een afremmende kracht F_W, die kwadratisch afhankelijk is van de momentane snelheid v van m. De grootte van deze wrijvingskracht F_W wordt gegeven door $F_W = kmv^2$, met k een constante. Gedurende de val verandert de zwaartekrachtsversnelling g niet. Na afstand x heeft m de snelheid $v(x)$.
Met behulp van g en k introduceren we een kenmerkende lengte $L \equiv \frac{1}{k}$ en een kenmerkende snelheid $v_1 \equiv \sqrt{\frac{g}{k}}$.



a) Verifieer de dimensies van L en v_1. Wat is uw suggestie voor een kenmerkende tijd?

b) Verifieer dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2v)$.
Leid nu af dat de val van m beschreven wordt door de differentiaalvergelijking

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v^2 - v_1^2\right) = -\frac{2}{L}\left(v^2 - v_1^2\right).$$

c) Geef de oplossing v^2 als functie van x (waar ook nog de constanten L en v_1^2 in voorkomen) en teken $v^2(x)$.

d) Wat wordt $v(x)$ voor $x \gg L$?
Laat zien dat voor $x \ll L$ de kinetische energie van m gegeven wordt door $(mg)x$.

e) Met de tijd als variabele heeft de beschrijvende differentiaalvergelijking de vorm $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2$. Merk op dat, voor vanaf nul aangroeiende snelheid, het rechterlid als *geheel* afneemt tot nul. Leid hiertoe af dat er dus een *constante* eindsnelheid bestaat en geef direct de waarde hiervan.

Extra

Te maken aan het eind van het tentamen indien u nog tijd over heeft.
Het kan vijf punten opleveren.
Leid af dat de afkorting $\alpha(t) = \frac{1}{v_1} v(t)$ de differentiaalvergelijking van e) te schrijven is als

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha} + \frac{\mathrm{d}\alpha}{1-\alpha} = \frac{2g}{v_1}\,\mathrm{d}t.$$

Laat vervolgens zien dat dit leidt tot de oplossing

$$v(t) = \alpha(t) v_1 = v_1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{2g}{v_1}t} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{2g}{v_1}t} + 1} = v_1 \tanh \frac{g}{v_1}\, t.$$

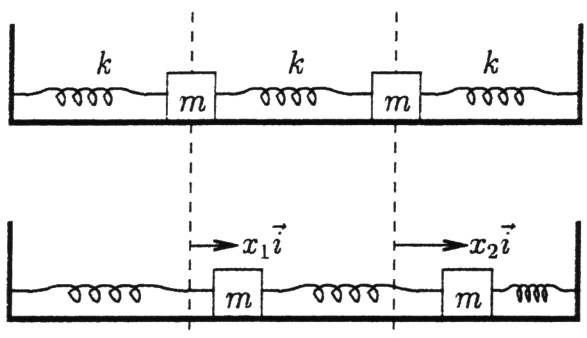
Wat wordt $v(t)$ voor $t \ll \frac{v_1}{g}$?

Opgave 2

Helaas is opgave 2 door een onbekende uit het originele tentamen verwijderd.

Opgave 3

Twee gelijke massa's m zijn door drie veren met gelijke veerconstante k verbonden, zoals aangegeven in de figuur. De buitenste veren zitten vast aan de muur en de massa's bewegen wrijvingsloos over de vloer; de stippellijnen geven de evenwichtsposities aan. Op een gegeven ogenblik heeft de linkermassa een uitwijking $x_1\vec{i}$ en de rechtermassa een uitwijking $x_2\vec{i}$, met $\vec{i}$ een eenheidsvector naar rechts. Noem voor het rekengemak $\frac{k}{m} \equiv \alpha$.



a) Laat zien dat de optredende krachten tot de volgende gekoppelde differentiaalvergelijkingen leiden:

$$\ddot{x} = -\alpha(2x_1 - x_2) \text{ en } \ddot{x}_2 = -\alpha(2x_2 - x_1).$$

b) We voeren nu in de hulpfunctie $y(t) \equiv x_1(t) + x_2(t)$.

Aan welke differentiaalvergelijking voldoet $z(t)$?

Wat is de cirkelfrequentie van deze trilling?

Geef de algemene gedaante van $z(t)$.

c) Leid nu af dat de algemene oplossingen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ gegeven worden door

$$x_1(t) = A\sin(t\sqrt{\alpha}) + B\cos(t\sqrt{\alpha}) + C\sin(t\sqrt{3\alpha}) + D\cos(t\sqrt{3\alpha})$$

en

$$x_2(t) = A\sin(t\sqrt{\alpha}) + B\cos(t\sqrt{\alpha}) - C\sin(t\sqrt{3\alpha}) - D\cos(t\sqrt{3\alpha})$$

Beide massa's worden in rust gehouden, de linkermassa in haar evenwichtspositie en de rechtermassa op een afstand x_0, naar rechts, uit haar evenwichtspositie. Op $t = 0$ worden beide massa's met snelheid nul losgelaten.

d) Geef $x_1(t)$ en $x_2(t)$ uitgedrukt in t, x_0 en beide cirkelfrequenties.

e) Geef voor de situatie uit onderdeel d) de onderlinge afstand tussen de twee massa's als functie van de tijd indien de evenwichtsposities een afstand L hebben.

Formuleblad

- Dot product: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- Cross product: $1\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.
- $f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) \to \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma + \cdots$.
- Taylor series: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$.
- $(1+\epsilon)^k = 1 + k\epsilon + \frac{k(k-1)}{2!}\epsilon^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\epsilon^3 + \cdots$ for all $k \in \mathbb{R}$ and $-1 < \epsilon < 1$.
- Linear motion: $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $W = \int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\mathrm{d}t$.
- Rotations: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$.
- Non-inertial frames: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r}' - \vec{V}_0$, $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - \vec{A}_0$.
- Cylindrical: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.
- Spherical: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$,
  $\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right]\hat{r} + \left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\hat{\theta} + \left[r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right]\hat{\phi}$.
- Conical sections: $r = \frac{r_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\theta}$: circle: $\epsilon = 0$ ($E_{\text{tot}} < 0$); ellipse: $0 < \epsilon < 1$ ($RE_{\text{tot}} < 0$); parabola: $\epsilon = 1$ ($E_{\text{tot}} = 0$); hyperbola: $\epsilon > 1$ ($E_{\text{tot}} > 0$).
- Elliptical orbits: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3$, $E_{\text{tot}} = -\frac{GMm}{2a}$.
- Two-body systems: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.
- n-body systems: $M = \sum_{i=1}^n m_i$; $R_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i$, $\vec{P}_{\text{cm}} = M\dot{\vec{R}}_{\text{cm}}$, $I_z \equiv \sum_{i=1}^n m_i r_{\perp i}^2$, $\vec{R}^*_{\text{cm}} = 0 \to \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}^*_i = 0 \to \sum_{i=1}^n \vec{p}^*_i = 0$ (constant masses), $\vec{L} = \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{L}^*$, $I_z = I_z^* + MR^2_{\perp\text{cm}}$ (Steiner).
- Solid rigid bodies: $\sum \to \int$ and $m_i \to \mathrm{d}m = \rho(\vec{r}')\mathrm{d}^3r$.
- Thin rod: $I_z^* = \frac{1}{12}ML^2$; cylinder: $I_z^* = \frac{1}{2}MR^2$; sphere: $I_z^* = \frac{2}{5}MR^2$.
-

Translation along z-axis	Rotation around z-axis
$p_z = mv_z$	$L_z = I_z\omega$
$F_z = m\dot{v}_z$	$M_z = I_z\dot{\omega}$
$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$.

- Lagrange: $L = T - V$; $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)$, $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.
- Hamilton: $H \equiv \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L$, $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$ and $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$.
- Conservative systems: $H = T + V$
- Lorentz-transformation: $\begin{cases} (x^0)' = \gamma(x^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}) \\ (\vec{x})' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma x^0\vec{\beta} \end{cases}$ with $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}$ and $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

- To obtain the inverse Lorentz-transformation exchange the primes ($'$) and replace $\vec{\beta}$ by $-\vec{\beta}$.
- Metric used: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ with $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.
- 4-vectors; $\tilde{x} = (ct, \vec{x})$, $\tilde{u} = \gamma_u(c, \vec{u})$, $\tilde{p} = m\tilde{u} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ where $\tilde{a} = (a^0, \vec{a})$.
- Invariants: The dot product $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$ of two arbitrary 4-vectors $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ is Lorentz-invariant.
- Note: $\tilde{p}^2 = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2c^2$ (thus 0 for a massless particle).
- Furthermore: $E = \gamma_u mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ thus $E_{u=0} = mc^2$.
- Some useful invariants: $(\mathrm{d}\tilde{x})^2 = (c\,\mathrm{d}\tau)^2$, $\tilde{u}^2 = c^2$, $\tilde{p}^2 = m^2c^2$.
- Note: $\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_1 = \tilde{p}_1^* \cdot \tilde{p}_2^*$ thus evaluation in rest frame or CMS is preferable.
- Invariant mass M_{inv}: $\tilde{P}_{\text{tot}}^2 \equiv M_{\text{inv}}^2 c^2$ and is thus conserved and invariant.
- Index notation: $x^\mu = (ct, \vec{x})$, $u^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$, $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a^\mu b_\mu$.

Some mathematical formulas

- $e^z = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$, $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $z = |z|e^{i\alpha}$.
- $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$; $\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$;
- $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots$; $\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots$;
- $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.
- $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ $(\cos(z) \neq 0)$; $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$ $(\cosh(z) \neq 0)$.
- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$, $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.
- $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\cos(z)}{\mathrm{d}z} = -\sin(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\cosh(z)}{\mathrm{d}z} = \sinh(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\arccos(z)}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\sin(z)}{\mathrm{d}z} = \cos(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\sinh(z)}{\mathrm{d}z} = \cosh(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\arcsin(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\tan(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{d}\ln(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{\mathrm{d}\arctan(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{1 + z^2}$.