JULIUS INSTITUUT, FACULTEIT NATUUR- EN STERRENKUNDE, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-350B WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR N.J.A.M. VAN EIJNDHOVEN EN G.A.P. ENGELBERTINK.

Uitwerking[1] Mechanica 2 (NS-350b) november 2004

Opgave 1: Wrijving kwadratisch met de snelheid

a) $F_W = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = kmv^2$ dus $[kv] = \frac{1}{\text{tijd}}$ of $\left[\frac{1}{k}\right] = \text{lengte}$.

$v_1 \equiv \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{gL}$ dus $[v_1] = \text{snelheid}$. Kenmerkende tijd

$$\frac{L}{v_1} = \frac{v_1}{g} = \frac{1}{\sqrt{gk}}$$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v^2 = 2v\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = 2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$F_{\text{netto}} = mg - F_W = mg - kmv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v^2 = 2g - 2kv^2 = -2k\left(v^2 - \frac{g}{k}\right) = -\frac{2}{L}\left(v^2 - v_1^2\right)$

of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v^2 - v_1^2\right) = -\frac{2}{L}\left(v^2 - v_1^2\right)$, want $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_1^2 = 0$.

c) Noem even $\left(v^2 - v_1^2\right) = \eta$ dan $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2}{L}\eta$ of $\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = -\frac{2}{L}\,\mathrm{d}x$.

$\ln\eta = -\frac{2}{L}x + \text{constante}$ of $\eta = \text{constante}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2x}{L}}$.

Dus $v^2 - v_1^2 = A\mathrm{e}^{-\frac{2x}{L}}$. Voor $x = 0$ is $v = 0$, dus $A = v_1^2$ zodat $v^2(x) = v_1^2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{L}}\right)$.

d) Voor $x \gg L$ wordt $v = v_1$; de eindsnelheid.

Voor $x \ll L$ geeft de ontwikkeling van de e-macht $v^2 \approx v_1^2(1 - 1 + 2kx) = v_1^2 2kx = 2gx$, zodat $\frac{1}{2}mv^2 = (mg)x =$ 'arbeid door zwaartekracht', dus in het begin (bij geringe snelheid) is de wrijvingskracht F_W te verwaarlozen.

e) Uiteindelijk is dus $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, dat wil zeggen v is constant en uit $0 = g - kv^2(\infty)$ volgt dan direct $v(\infty) = \sqrt{\frac{g}{k}} = v_1$.

Extra

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2 = g\left(1 - \frac{k}{g}v^2\right) = g\left(1 - \frac{v^2}{\frac{g}{k}}\right)$

$\frac{\mathrm{d}\frac{v}{v_1}}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{v_1}\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)$ of $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{v_1}(1 - \alpha^2)$

$\frac{2\,\mathrm{d}\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{2g}{v_1}\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha} + \frac{\mathrm{d}\alpha}{1-\alpha} = \frac{2g}{v_1}\,\mathrm{d}t$.

Integreren geeft dan $\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha) = \frac{2g}{v_1}t + C$ met $C = 0$ want $\alpha(0) = 0$, zodat $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \mathrm{e}^{\frac{2g}{v_1}t}$ of

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2g}{v_1}t} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{2g}{v_1}t} + 1}.$$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

Teller en noemer vermenigvuldigen met $\mathrm{e}^{-\frac{g}{v_1}t}$ geeft dan

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{g}{v_1}t} - \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_1}t}}{\mathrm{e}^{\frac{g}{v_1}t} + \mathrm{e}^{\frac{g}{v_1}t}} = \tanh \frac{g}{v_1}t.$$

Voor $t \ll \frac{v_1}{g}$ wordt $\tanh \frac{g}{v_1}t \approx \frac{g}{v_1}t$ en dus $v(t) = v_1\alpha(t) \approx gt$, d.w.z. in het begin is F_W te verwaarlozen.

Opgave 2

Helaas is opgave 2 door een onbekende uit het tentamen verwijderd. De uitwerking volgt hieronder.

a) In $\mathcal{S}'$ is er behoud van energie in het gravitatieveld van de planeet.

b)

$$\tan\theta_{1,2} = \frac{v' \sin\theta'_{1,2}}{V + v'\cos\theta'_{1,2}}$$

$$\begin{aligned} {v_2}^2 &= (v'\sin\theta'_2)^2 + (v'\cos\theta'_2)^2 = v'^2 + V^2 + 2Vv'\cos\theta'_2 \\ {v_1}^2 &= = v'^2 + V^2 + 2Vv'\cos\theta'_1 \end{aligned}$$

zodat $\frac{1}{2}m({v_2}^2 - {v_1}^2) = mVv'(\cos\theta'_2 - \cos\theta'_1)$.

Opgave 3

a) Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat de veren oorspronkelijk niet uitgerekt zijn.

Linkermassa:
de uitrekking van de meest linkse veer zorgt voor een kracht terug naar links $kx_1(-\vec{i})$. De middenveer is netto ook uitgerekt en zorgt voor een kracht naar rechts $k(x_2 - x_1)\vec{i}$. Zodat $m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - kx_1 = k(x_2 = 2x_1)$ of $\ddot{x}_1 = -\alpha(2x_1 - x_2)$.

Rechtermassa:
de meest rechtse veer wordt ingedrukt en zorgt voor een kracht naar links $kx_2(-\vec{i})$. De middenveer is netto uitgerekt en zorgt voor een kracht naar links $k(x_2 - x_1)(-\vec{i})$. Zodat $m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = k(x_1 - 2x_2)$ of $\ddot{x}_2 = -\alpha(2x_2 - x_1)$.

b) $\ddot{y} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\alpha(2\dot{x}_1 - x_2 + 2x_2 - x_1) = -\alpha(x_1 + x_2) = -\alpha y$
$\ddot{z} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\alpha(2x_1 - x_2 - 2x_2 + x_1) = -3\alpha(x_1 - x_2) = -3\alpha z$
Cirkelfrequentie $\sqrt{3\alpha}$ en $z(t) = R\sin(t\sqrt{3\alpha}) + S\cos(t\sqrt{3\alpha})$.

c) $x_1(t) = \frac{1}{2}(y+z) = A\sin(t\sqrt{\alpha}) + B\cos(t\sqrt{\alpha}) + C\sin(t\sqrt{3\alpha}) + D\cos(t\sqrt{3\alpha})$,
$x_2(t) = \frac{1}{2}(y-z) = A\sin(t\sqrt{\alpha}) + B\cos(t\sqrt{\alpha}) - C\sin(t\sqrt{3\alpha}) - D\cos(t\sqrt{3\alpha})$

d) De randvoorwaarden zijn dus $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = x_0$ en $\dot{x}_2(0) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) = 0 \text{ geeft } B + D = 0 \\ x_2(0) = x_0 \text{ geeft } x_0 = B - D \end{aligned}\right\} B = \tfrac{1}{2}x_0 \text{ en } D = -\tfrac{1}{2}x_0$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(0) = 0 \text{ geeft } A\sqrt{\alpha} + C\sqrt{3\alpha} = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \text{ geeft } A\sqrt{\alpha} - C\sqrt{3\alpha} = 0 \end{aligned}\right\} A = 0 \text{ en } C = 0$$

zodat $x_1(t) = \frac{1}{2}x_0\left(\cos(t\sqrt{\alpha}) - \cos(t\sqrt{3\alpha})\right)$ en $x_2(t) = \frac{1}{2}x_0\left(\cos(t\sqrt{\alpha}) + \cos(t\sqrt{3\alpha})\right)$.

e) onderlinge afstand $= L + x_2 - x_1 = L + x_0\cos(t\sqrt{3\alpha})$.