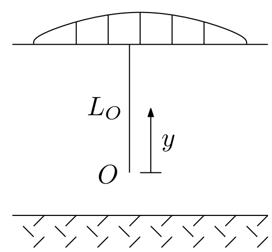
Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2003/2004 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Mechanica 2 (NS-350b)
13 november 2003

Opgave 1



Hoog boven een traag stromende rivier bevindt zich een brug. Op de brug staat een springer met om zijn middel het ene einde van een lang elastisch koord, terwijl het andere einde aan de brug vastzit. Op zeker moment laat de springer (met massa m) zich van de brug vallen. De gravitatieversnelling is g. We nemen aan dat er alleen beweging is in verticale richting, zonder luchtweerstand of wrijving in het koord. Het koord is massaloos, heeft rustlengte L_0 en werkt als een veer met veerconstante k. We noemen de verticale richting y (met richting water $\rightarrow$ brug als positief) en kiezen het punt op afstand L_0 onder de brug als oorsprong O. De springer passeert O op $t = 0$ met snelheid v_0 richting water. Voor het rekengemak maken we gebruik van de arkortingen $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\eta \equiv \frac{mg}{kL_0}$, het getal dat de verhouding tussen de twee voorkomende (ongerelateerde) krachten aangeeft.
Tenslotte beschouwen we de beweging van de springer alleen tot aan het tijdstip dat hij in opwaartse richting het punt O weer passeert.

a) Druk v_0 uit in L_0 en g.

   Stel de differentiaalvergelijking op voor $y(t)$ en verifieer dat $\ddot{z} = \omega^2 z = 0$ als $z(t) \equiv y(t) + \eta L_0$.

b) Laat zien dat $z(t) = -A \sin(\omega t - \alpha)$ voldoet als oplossing en gebruik de randvoorwaarden om af te leiden dat $A = L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}$ en $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\eta}$.

c) Wat kunt u opmerken over de tijdsafgeleiden van $y(t)$ en $z(t)$?

   Laat zien dat de maximale snelheid $v_{\max}$ van de springer gegeven wordt door $v_{\max} = v_0\sqrt{1 + \frac{1}{2}\eta}$ en de maximale versnelling door $a_{\max} = g\sqrt{1 + \frac{2}{\eta}}$.

d) De som van kinetische-, gravitatie- en veerenergie is een bewegingsconstante, i.e. $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy + \frac{1}{2}ky^2 = \text{constant}$.

   Bewijs dit door de tijdsafgeleide van deze energievergelijking te beschouwen en op de onderliggende differentiaalvergelijking te letten.

   Hoe groot is de constante?

e) Stel, het elastische koord hangt nu *zonder* springer in rust, van de brug af naar beneden. Het vrije uiteinde valt dan samen met O. Met behulp van een kraan op een boot op het water wordt nu de springer aan het vrije uiteinde gehaakt door de *langzaam* dalende kraan zolang ondersteund totdat hij in rust aan het koord hangt.

   Hoe ver is het koord nu uitgerekt, in termen van L_0 en η?

   Welke waarde van z correspondeert met deze positie van de springer?

Opgave 2

Rondom de aarde (aardmassa M, gravitatieconstante G) beweegt een communicatiesatelliet in een elliptische baan.
In het perigeum (meest nabije punt) is de afstand tot het brandpunt r_p en heeft de satelliet een snelheid v_p.
In het apogeum is de afstand r_a en de snelheid v_a.

a) Leid uit de behoudswetten af dat $\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}$ en $v_\mathrm{p} v_\mathrm{a} = v_0^2$, met $v_0 \equiv \sqrt{\frac{2GM}{r_\mathrm{p}+r_\mathrm{a}}}$.

Om in het perigeum uit deze gebonden baan te ontsnappen dient daar de snelheid v_p verhoogd te worden tot v_pe. Voor het apogeum dient analoog de snelheid v_a verhoogd te worden tot v_ae.

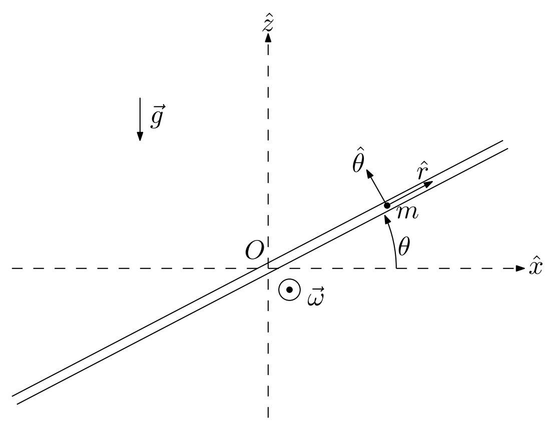
b) Uit welk van deze beide punten kan men nu met de *minste impulsverandering* ontsnappen? (Aanwijzing: beschouw $\frac{v_\mathrm{ae}-v_\mathrm{a}}{v_\mathrm{pe}-v_\mathrm{p}}$ en introduceer $\eta \equiv \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}$ met $\eta > 1$.)

c) Voor elk punt van de gebonden baan is de totale energie van de satelliet hetzelfde en wel (*laat zien*) $-\frac{1}{2}mv_0^2$. Dit bedrag dient opgebracht te worden om op een willekeurig punt uit de baan te ontsnappen.

   Leid nu af dat geldt $v_\mathrm{ae}^2 - v_\mathrm{a}^2 = v_\mathrm{pe}^2 - v_\mathrm{p}^2$.

Opgave 3

In het verticale z-x vlak roteert een dunne holle buis met constante hoeksnelheid $\vec{\omega}$ om een as die loodrecht op dit vlak staat en door de oorsprong O gaat. Op tijdstip nul passeert de buis de x-as zodat hoek $\theta = \omega t$. De versnelling van de zwaartekracht is $\vec{g} = g(-\hat{z})$.
Een deeltje met massa m kan wrijvingsloos in de buis bewegen en bevindt zich op $t = 0$ in r_0 met beginsnelheid $v_0\hat{r}$. De eenheidsvectoren $\hat{\theta}$ en $\hat{r}$ (zie figuur) hebben de richting van toenemende θ en r.



a) In het meedraaiende stelsel is het deeltje onderhevig aan verschillende krachten, bijv. de zwaartekracht $m\vec{g} = mg\cos\theta(-\hat{\theta}) + mg\sin\theta(-\hat{r})$. Geef analoge uitdrukkingen voor de centrifugaal-, Coriolis- en reactiekracht.

b) Hoe luidt de bewegingsvergelijking voor het deeltje ten opzichte van de buis?

c) Verifieer dat de oplossing van de verkregen differentiaalvergelijkingen gegeven wordt door

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

   en druk de constanten A en B uit in g, ω, r_0 en v_0.

d) Welke eisen moeten we apart aan r_0 en v_0 opleggen opdat het deeltje een zuivere harmonische trilling uitvoert? Wat zijn dan de amplitude en de periode?

e) Bij gegeven r_0 kiezen we de beginsnelheid v_0 als $v_0 = \frac{g}{2\omega} - \omega r_0$.

Hoe luidt nu de uitdrukking voor $r(t)$ met g, ω en r_0 als constanten?

Ga na dat deze bewering in de loop van de tijd steeds meer gaat lijken op de harmonische trilling bij onderdeel d).