Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2003/2004 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Uitwerking[1] Mechanica 2 (NS-350b)
13 november 2003

Opgave 1

a) $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL_0$ zodat $v_0 = \sqrt{2gL_0}$.

$$\begin{aligned} m(-\ddot{y}) &= mg - k(-y) \\ \ddot{y} &= -y - \frac{k}{m}y = -\omega^2(y + \frac{g}{\omega^2}) \text{ met } \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k} = \eta L_0. \\ \ddot{z} &= -\omega^2(z - \eta L_0 + \eta L_0) = -\omega^2 z. \end{aligned}$$

b) $\dot{z} = -A\omega\cos(\omega t - \alpha)$

$\ddot{z} = +A\omega^2\sin(\omega t - \alpha) = -\omega^2 z$

$z(0) = A\sin\alpha$, maar ook $z(0) = \eta L_0 + y(0) = \eta L_0$

$\dot{z}(0) = -A\omega\cos\alpha$, maar ook $\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = -v_0$

zodat

$$\tan\alpha = (-\omega)\frac{\eta L_0}{-v_0} = \eta\frac{\omega L_0}{v_0} = \eta\frac{L_0\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{2gL_0}} = \eta\frac{L_0\sqrt{\frac{1}{\eta}\frac{g}{L_0}}}{\sqrt{2gL_0}} = \eta\sqrt{\tfrac{1}{2}\eta} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\eta}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A^2\sin^2\alpha + A^2\cos^2\alpha &= \eta^2 L_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = \eta^2 L_0 + \frac{2gL_0}{\frac{k}{m}} = \eta^2 L_0^2 + \frac{2mg}{k}L_0 \\ &= \eta^2 L_0 + 2\eta L_0^2 = L_0^2\eta(\eta+2), \text{ zodat } A = L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} v_{\max} = \dot{y}_{\max} = \dot{z}_{\max} = A\omega &= L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}\sqrt{\frac{k}{m}} = L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}\sqrt{\frac{1}{\eta}\frac{g}{L_0}} \\ &= \sqrt{\eta+2}\sqrt{gL_0} = \sqrt{\eta+2}\frac{v_0}{\sqrt{2}} = v_0\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\eta}. \\ a_{\max} = \ddot{y}_{\max} = \ddot{z}_{\max} = A\omega^2 &= L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}\frac{k}{m} = L_0\sqrt{\eta(\eta+2)}\frac{1}{\eta}\frac{g}{L_0} = g\sqrt{1+\frac{2}{\eta}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + \tfrac{1}{2}ky^2 &= \text{constant} \\ m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} + ky\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + g + \frac{k}{m}\dot{y} &= 0, \text{ oké} \\ \text{constant} &= \tfrac{1}{2}mv_0^2 = mgL_0 \text{ (bijv. voor } y = 0) \end{aligned}$$

e) $y = -\eta L_0$ of $z = 0$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

Opgave 2

a) Impulsmomentbehoud: $mv_{\mathrm{p}}^2 r_{\mathrm{p}} = mv_{\mathrm{a}} r_{\mathrm{a}}$ met $m =$ massa satelliet.
Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv_{\mathrm{p}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{a}}}$, $v_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{a}}\frac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}}$
$\frac{1}{2}v_{\mathrm{a}}^2\frac{r_{\mathrm{a}}^2}{r_{\mathrm{p}}^2} - \frac{GM}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{a}}^2 - \frac{GM}{r_{\mathrm{a}}}$
$\frac{1}{2}v_{\mathrm{a}}^2\frac{(r_{\mathrm{a}}+r_{\mathrm{p}})(r_{\mathrm{a}}-r_{\mathrm{p}})}{r_{\mathrm{p}}^2} = GM\frac{r_{\mathrm{a}}-r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}}r_{\mathrm{p}}}$ zodat
$v_a = \sqrt{\frac{2GM}{(r_{\mathrm{a}}+r_{\mathrm{p}})}\frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}}}} = v_0\sqrt{\frac{r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}}}}$ en $v_{\mathrm{p}} = v_0\sqrt{\frac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}}}$, zodat $v_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{a}} = v_0^2$.

b) $\frac{1}{2}mv_{\mathrm{pe}}^2 = \frac{GMm}{r_{\mathrm{p}}}$, dus $v_{\mathrm{pe}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{p}}}} = v_0\sqrt{\frac{r_{\mathrm{a}}+r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{p}}}} = v_0\sqrt{1+\eta}$, terwijl $v_{\mathrm{p}} = v_0\sqrt{\eta}$
Analoog $v_{\mathrm{ae}} = v_0\sqrt{\frac{r_{\mathrm{a}}+r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}}}} = v_0\sqrt{1+\frac{1}{\eta}}$, terwijl $v_{\mathrm{a}} = v_0\sqrt{\frac{1}{\eta}}$

$$\frac{v_{\mathrm{ae}} - v_{\mathrm{a}}}{v_{\mathrm{pe}} - v_{\mathrm{p}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\eta}} - \sqrt{\frac{1}{\eta}}}{\sqrt{1+\eta} - \sqrt{\eta}} = \frac{\sqrt{1+\eta} + \sqrt{\eta}}{\sqrt{1+\frac{1}{\eta}} + \sqrt{\frac{1}{\eta}}} = \frac{\sqrt{\eta(\eta+1)} + \eta}{\sqrt{(\eta+1)} + 1} > 1, \text{ aangezien } \eta > 1$$

(Voor $\eta = 1$ is de verhouding 1, zoals behoort voor een cirkelbaan.)
Voor ontsnappen uit het perigeum is dus de *minste impulsverandering* nodig.

c) $v_{\mathrm{ae}}^2 - v_{\mathrm{a}}^2 = v_0^2(1+\frac{1}{\eta}) - v_0^2\frac{1}{\eta} = v_0^2$
$v_{\mathrm{pe}}^2 - v_{\mathrm{p}}^2 = v_0^2(1+\eta) - v_0^2\eta = v_0^2$
$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{ae}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{pe}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{p}}^2$, is ook direct op te merken.

Opgave 3

a) Centrifugaalkracht $m\omega^2 r\hat{r}$
Corioliskracht: $-2m\omega\dot{r}\hat{\theta}$
Reactiekracht: $(mg\cos\theta + 2m\omega\dot{r})\hat{\theta}$

b) $m\ddot{r} = m\omega^2 r - mg\sin\theta$
$\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin\theta = -g\sin\omega t$

c)

$$\begin{aligned} r &= A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t && \rightarrow r_0 = A + B \\ \dot{r} &= A\omega\mathrm{e}^{\omega t} - B\omega\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\cos\omega t && \rightarrow v_0 = A\omega - B\omega + \frac{g}{2\omega} \\ \ddot{r} &= A\omega^2\mathrm{e}^{\omega t} + B\omega^2\mathrm{e}^{-\omega t} - \tfrac{1}{2}g\sin\omega t \end{aligned}$$

zodat $\ddot{r} - \omega^2 r = -\frac{1}{2}g\sin\omega t - \frac{g}{2}\sin\omega t = -g\sin\omega t$, oké.
Uit r_0 en v_0 volgt:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}r_0 + \frac{v_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2} \\ B &= \tfrac{1}{2}r_0 - \frac{v_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2} \end{aligned}$$

d) Voor een harmonische trilling dienen zowel A als B nul te zijn, zodat $v_0 = \frac{g}{2\omega}$ en $r_0 = 0$. De amplitude is dan $\frac{g}{2\omega^2}$ en de periode $\frac{2\pi}{\omega}$.

e) $A = \frac{1}{2}r_0 + \left(\frac{g}{4\omega^2} - \frac{1}{2}r_0\right) - \frac{g}{4\omega^2} = 0$ en $B = \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_0 = r_0$
zodat $r(t) = r_0\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$,
een trilling rond een (naar nul gaande) evenwichtsstand $r_0\mathrm{e}^{-\omega t}$.