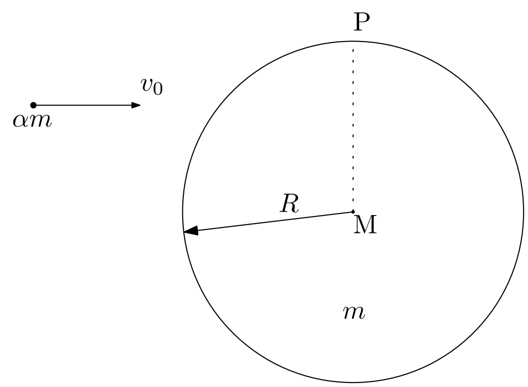
Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2003/2004 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Mechanica 2 (NS-350b)
29 januari 2004

Opgave 1

Een dunne schijf (middelpunt M, straal R, massa m en t.o.v. as door M $\perp$ schijf een traagheidsmoment $\frac{1}{2}mR^2$) bevindt zich in rust op een horizontaal plat vlak. De schijf kan wrijvingsloos over het vlak bewegen. Een puntvormige kogel met massa αm (met α een getal > 0) beweegt met constante snelheid v_0 evenwijdig aan het vlak in een baan die raakt aan de schijf. De kogel treft de schijf in punt P en blijft instantaan in de rand van de schijf steken. Hierdoor gaat de schijf, al roterend, voortbewegen.



a) Na de botsing ligt het zwaartepunt Z van het systeem (schijf + kogel) op de lijn PM.

   Bepaal de afstand ZM, uitgedrukt in R en α.

   Hoe groot is de translatiesnelheid V_Z van het systeem?

a) Leid af dat het traagheidsmoment I van het systeem t.o.v. as door Z $\perp$ schijf gegeven wordt door $I = mR^2\left(\frac{3\alpha+1}{2\alpha+2}\right)$.

   Hoe groot is de hoeksnelheid ω om deze as, uitgedrukt in $\frac{v_0}{R}$ en α?

b) Voor de botsing was er een totale kinetische energie $E_{\text{tot}}^{\text{voor}} = \frac{1}{2}\alpha m v_0^2$.

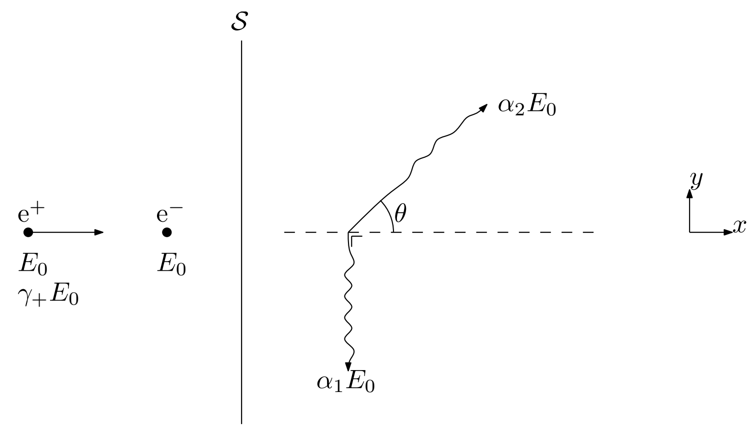
   Hoe groot is $E_{\text{tot}}^{\text{na}}$, uitgedrukt in $E_{\text{tot}}^{\text{voor}}$ en α?

c) Voor de botsing had de kogel een impuls van $\alpha m v_0$.

   Hoe groot is het impulsverlies van de kogel direct na de botsing, uitgedrukt in mv_0 en α?

d) Teken voor $\alpha = 1$ de baan van het zwaartepunt Z, zowel voor als na de botsing.

Opgave 2. Invariante massa



In het stelsel $\mathcal{S}$ botst een positron e^+ op een stilstaand elektron e^-. Beide deeltjes hebben een rustenergie E_0 en het positron heeft een energie $\gamma_+ E_0$. In de reactie ontstaan twee fotonen met energieën $\alpha_1 E_0$ en $\alpha_2 E_0$, met α_1 en α_2 twee positieve getallen. Detectie van $\alpha_1 E_0$ vindt plaats loodrecht op de bewegingsrichting van het positron. Het foton $\alpha_2 E_0$ maakt dan een hoek θ met de positronrichting, zoals aangegeven in de figuur. De grootheden E_0, γ_+ en de 90° detectiehoek zijn gegeven. De positronrichting is de x-richting.

a) Bij de vier participanten behoren de viervectoren $\tilde{p}_+, \tilde{p}_-, \tilde{p}_1$ en $\tilde{p}_2$.

   Ga na dat $\tilde{p}_1 = \frac{1}{c} E_0(\alpha_1, 0, -\alpha_1, 0)$ en geef analoge uitdrukkingen voor de drie overige viervectoren.

   Wat zijn de waarden van $\tilde{p}_-^2, \tilde{p}_1^2$ en $\tilde{p}_2^2$?

b) Formuleer voor de reactie vierimpulsbehoud en druk de drie onbekenden α_1, α_2 en $\sin\theta$ uit in γ_+. (Wanneer dit niet lukt, neem dan maar $\alpha_1 = 1$.)

c) Hangt de invariante massa alleen van E_0 af, of speelt γ_+ ook een rol?

   Druk de invariante massa M_{inv} uit in de gegevens.

d) We beschouwen de reactie nu in het **nulimpulsstelsel** $\mathcal{S}^*$, met de corresponderende getallen $\gamma_+^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*$ en θ^*.

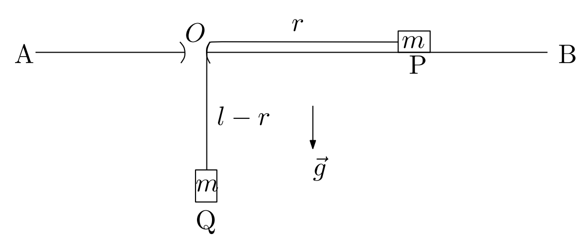
   Is γ_+^* kleiner of groter dan γ_+?

   Wat kunt u opmerken over de relatie tussen α_1^* en α_2^*?

   Bereken nu $(\tilde{P}^*_{\text{totaal}})^2$ en leid af wat in $\mathcal{S}^*$ de fotonenergieën zijn, zowel in termen van E_0 en γ_+ als in termen van M_{inv}.

Opgave 3. Mismatch

In een horizontaal vlak door AB bevindt zich een kleine opening, bij O. De even zware deeltjes P en Q (massa m) zijn verbonden door een massaloze draad met *vaste* lengte l. Het geheel bevindt zich in een gravitatieveld $\vec{g}$. Deeltje P kan wrijvingsloos over het vlak bewegen. Zijn momentane afstand tot O is $r(t)$ en $\theta(t)$ is de hoek tussen OP en een vaste lijn door O in het vlak. Voor het vlak kiezenwe de gravitatiepotentiaal nul.



Op $t = 0$ kiezen we $r(0) = r_0, \theta(0) = 0, \dot{r}(0) = 0$ en $r_0\dot{\theta}(0) = v_0$.
Voor het rekengemak voeren we het getal η (met $\eta \geq 0$) in, gedefinieerd door $v_0^2 = \eta^3 g r_0$. Bij gegeven r_0 kunnen we met de parameter η de tangentiële beginsnelheid v_0 en dus het *impulsmoment t.o.v. O*, $mv_0r_0 = m\sqrt{g\eta^3 r_0^3}$, variëren.

a) Leid af dat de Lagrangiaan L voor het systeem van de beide massa's gegeven wordt door:

$$L = \tfrac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mg(l - r)$$

b) Laat via de Lagrangiaan zien dat voor deeltje P geldt $r^2\dot{\theta} = \text{constant} = r_0 v_0 = \sqrt{g\eta^3 r_0^3}$, d.w.z. behoud van impulsmoment t.o.v. O.

Was dat *a priori* duidelijk?

Wanneer deeltje P in $r = r_0$ zonder snelheid ($\eta = 0$) losgelaten zou worden, hoe groot wordt dan de valversnelling van deeltje Q?

Geef fysische toelichting.

c) Laat zien dat de vergelijkingen van Lagrange leiden tot de differentiaalvergelijking

$$\ddot{r} = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{\eta^3 r_0^3}{r^3} - 1\right).$$

Ga na dat onder de oplossingen hiervan een cirkelbaan voorkomt.

Hoe groot dient η gekozen te worden opdat de straal van deze cirkelbaan juist r_0 is?

Is voor $\eta < 1$ de kracht op P *aanvankelijk* aantrekkend of afstotend?

Wanneer de kracht op P van het ene type (aantrekkend of afstotend) overgaat in het andere type, dan is er een evenwichtspunt.
Wat is de waarde van r in dit evenwichtspunt?

d) Ga na dat $\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right)$ en leid vervolgens af dat op elke afstand r, de *radiale* snelheid van P gegeven wordt door

$$\dot{r} = \pm\sqrt{gr_0}\left[1 + \tfrac{1}{2}\eta^3 - \frac{r}{r_0} - \tfrac{1}{2}\eta^3\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\tfrac{1}{2}\eta^3 g r_0 \frac{r_0^2}{r^2}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(\frac{2}{\eta^3}\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r}{r_0} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Voor welke waarde van r is de radiale snelheid het grootst?

e) Op afstand r heeft deeltje P een snelheid $\vec{v}_{\mathrm{P}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ en deeltje Q een snelheid v_{Q}. Laat zien dat $v_{\mathrm{P}}^2 + v_{\mathrm{Q}}^2 - 2g(r_0 - r) = \text{constant}$.

Hoe groot is deze constante?

f) Voor $0 < \eta < 1$ blijkt $r(t)$ periodiek te variëren tussen de twee uitersten r_0 en $_{\text{keer}}$.

Leid af dat $r_{\text{keer}} = \frac{1}{4}r_0\eta^3\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\eta^3}}\right)$ en dat $r_{\text{keer}} < \eta r_0$.

Wat gebeurt er met de "bandbreedte" $(r_0 - r_{\text{keer}})$ als $\eta \to 1$?

[Hint: Wat is de waarde van $\dot{r}$ voor $r = r_0$ en $r = r_{\text{keer}}$?]