Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-350B werd in 2005/2006 gegeven door prof. dr. ir. H.A. Dijkstra.

Mechanica 2 (NS-350B)
20 april 2006

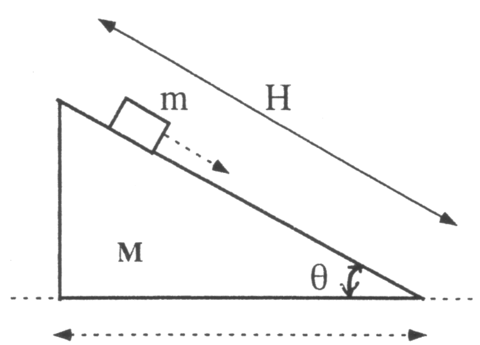
Formuleblad is bijgevoegd!
Helaas zijn niet alle onderdelen in een som onafhankelijk. Mocht je vastlopen en informatie is nodig voor het volgende onderdeel, poneer een antwoord en reken/beredeneer verder.

Opgave 1 *(30 punten)*

a) Geef de afleiding van de Lagrange vergelijking voor een systeem met één vrijheidsgraad met Lagrangiaan $L(q, \dot{q})$ vanuit het principe van Hamilton ($\delta J = 0$), met

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}t.$$

Beschouw nu een massa m die, onder invloed van de zwaartekracht, zonder wrijving naar beneden kan bewegen op een hellend vlak (zie 1) over een afstand H. Het hellend vlak, met hellingshoek θ en massa M, kan wrijvingsloos horizontaal bewegen. *(8 punten)*



Figuur 1:

b) Bepaal het aantal vrijheidsgraden n van het mechanisch systeem in figuur 1 en kies geschikte gegeneraliseerde coördinaten $(q_1, \cdots, q_n)$. *(4 punten)*

c) Geef de Lagrangiaan L van dit systeem. *(8 punten)*

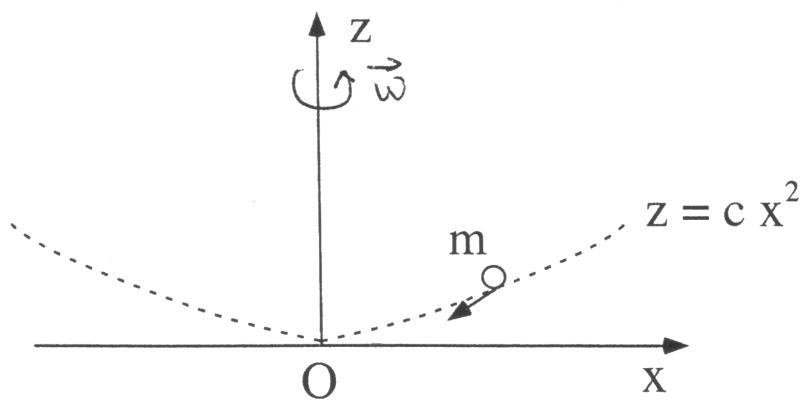
d) Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor zowel de beweging van de massa m als van het hellend vlak.

Veronderstel nu dat $M = 2m$. Op $t = 0$ staat het hellend vlak stil en wordt de massa m boven losgelaten. *(5 punten)*

e) Bereken de tijd waarop de massa m het hellend vlak verlaat. Is ondertussen het hellend vlak naar links of naar rechts verschoven? Beredeneer je antwoord. *(5 punten)*

Opgave 2 *(30 punten)*

Een kom met een paraboolvormige bodem, $z = cr^2$ waarbij $r^2 = x^2 + y^2$, draait om de verticale z-as met hoeksnelheid $\vec{\omega}$.



Figuur 2:

De oorsprong O van dit stelsel S bevindt zich in het midden op de bodem van de kom (voor het zijaanzicht, zie figuur 2. In de kom beweegt zonder wrijving een puntmassa m. In het met de kom meedraaiend stelsel S' bevindt m zich op een gegeven moment op de positie $(x'_0, 0, z'_0)$ en beweegt langs het oppervlak met een snelheid $\vec{v}'$ in de richting van de oorsprong $O' = O$. De valversnelling is g en op $t = 0$ vallen de assen van S en S' samen.

a) Welke krachten werken in het stelsel S' op m? Geef de grootte en teken de richting van deze krachten. *(10 punten)*

b) Bereken de hoeksnelheid $\vec{\omega}_0$ waarvoor er op m geen netto resulterende kracht tangentieel aan de curve $z' = c(x')^2$ is. *(8 punten)*

c) Toon aan dat het resultaat onder b) onafhankelijk is van de positie x'_0.

De kom draait nu rond met de hoeksnelheid $\vec{\omega}_0$ uit vraag b). Vanuit het meedraaiende stelsel S' kijken we boven op de kolom. Neem aan dat de afstand van m tot O' steeds zo gering is dat de beweging vrijwel in het (x', y')-vlak plaatsvindt. *(4 punten)*

d) Toon aan dat de baan van de massa m in het (x', y')-vlak een cirkel is en bereken de straal van deze cirkelbaan.

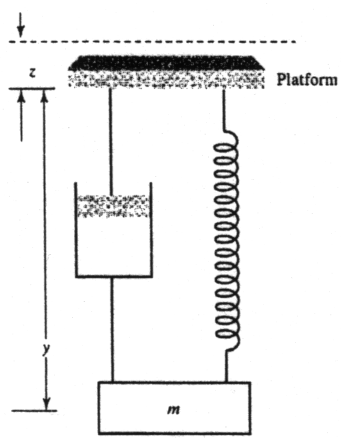
Opgave 3 *(30 punten)*

Een veer met veerconstante k en rustlengte l en een mechanische demper met dempingsconstante c verbinden een massa m en een platform zoals te zien is in figuur 3. De demping is evenredig met de snelheid van de massa m. Laat y de uitwijking van de massa m zijn t.o.v. het platform en z de extern gedreven uitwijking van het platform. Dit is een model voor een seismograaf waarbij het platform aan de aarde is verbonden en trillingen in de aarde worden geregistreerd door de beweging van de massa m.

a) Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor de massa m wordt gegeven door

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{z}$$

waarbij $2\gamma = \frac{c}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ en $y = x + \frac{mg}{k} + l$. *(10 punten)*



Figuur 3:

Neem nu aan dat er een trilling door het platform gaat van de vorm

$$z(t) = D\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Dit geeft een uitwijking in de positie van m in de vorm $x(t) = A\mathrm{e}^{i(\omega t - \phi)}$.

b) Bepaal de amplitude A als functie van de parameters γ, ω_0, ω en D. *(8 punten)*

c) Leg kort uit wat resonantie is. Kan er in dit systeem resonantie optreden en zo ja, voor welke waarden van de parameter γ? *(8 punten)*

d) Welke condities (in termen van k, c en m) zou je kiezen zodat dit apparaat nauwkeurig verticale verplaatsingen van het aardoppervlak registreert? *(4 punten)*

Formuleblad

- Dot product: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- Cross product: $1\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.
- $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \to \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma + \cdots$.
- Taylor series: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$.
- $(1+\epsilon)^k = 1 + k\epsilon + \frac{k(k-1)}{2!}\epsilon^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\epsilon^3 + \cdots$ for all $k \in \mathbb{R}$ and $-1 < \epsilon < 1$.
- Linear motion: $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\mathrm{d}t$.
- Rotations: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$.
- Non-inertial frames: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}' - \vec{V}_0$, $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - \vec{A}_0$.
- Cylindrical: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.
- Spherical: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$,
  $\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right]\hat{r} + \left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\hat{\theta} + \left[r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right]\hat{\phi}$.
- Conical sections: $r = \frac{r_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\theta}$: circle: $\epsilon = 0$ ($E_{\mathrm{tot}} < 0$); ellipse: $0 < \epsilon < 1$ ($RE_{\mathrm{tot}} < 0$); parabola: $\epsilon = 1$ ($E_{\mathrm{tot}} = 0$); hyperbola: $\epsilon > 1$ ($E_{\mathrm{tot}} > 0$).
- Elliptical orbits: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3$, $E_{\mathrm{tot}} = -\frac{GMm}{2a}$.
- Two-body systems: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.
- n-body systems: $M = \sum_{i=1}^n m_i$; $R_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i$, $\vec{P}_{\mathrm{cm}} = M\dot{\vec{R}}_{\mathrm{cm}}$, $I_z \equiv \sum_{i=1}^n m_i r_{\perp i}^2$, $\vec{R}^*_{\mathrm{cm}} = 0 \to \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}^*_i = 0 \to \sum_{i=1}^n \vec{p}^*_i = 0$ (constant masses), $\vec{L} = \vec{L}_{\mathrm{cm}} + \vec{L}^*$, $I_z = I_z^* + MR^2_{\perp\mathrm{cm}}$ (Steiner).
- Solid rigid bodies: $\sum \to \int$ and $m_i \to \mathrm{d}m = \rho(\vec{r}')\mathrm{d}^3r$.
- Thin rod: $I_z^* = \frac{1}{12}ML^2$; cylinder: $I_z^* = \frac{1}{2}MR^2$; sphere: $I_z^* = \frac{2}{5}MR^2$.
-

Translation along z-axis	Rotation around z-axis
$p_z = mv_z$	$L_z = I_z\omega$
$F_z = m\dot{v}_z$	$M_z = I_z\dot{\omega}$
$T_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$.

- Lagrange: $L = T - V$; $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)$, $p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.
- Hamilton: $H \equiv \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L$, $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$ and $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$.
- Conservative systems: $H = T + V$
- Lorentz-transformation: $\begin{cases} (x^0)' = \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ (\vec{x})' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{x})\vec{\beta} - \gamma x^0\vec{\beta} \end{cases}$ with $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}$ and $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

- To obtain the inverse Lorentz-transformation exchange the primes ($'$) and replace $\vec{\beta}$ by $-\vec{\beta}$.
- Metric used: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ with $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.
- 4-vectors; $\tilde{x} = (ct, \vec{x})$, $\tilde{u} = \gamma_u(c, \vec{u})$, $\tilde{p} = m\tilde{u} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ where $\tilde{a} = (a^0, \vec{a})$.
- Invariants: The dot product $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$ of two arbitrary 4-vectors $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ is Lorentz-invariant.
- Note: $\tilde{p}^2 = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2c^2$ (thus 0 for a massless particle).
- Furthermore: $E = \gamma_u mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ thus $E_{u=0} = mc^2$.
- Some useful invariants: $(\mathrm{d}\tilde{x})^2 = (c\,\mathrm{d}\tau)^2$, $\tilde{u}^2 = c^2$, $\tilde{p}^2 = m^2c^2$.
- Note: $\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_1 = \tilde{p}_1^* \cdot \tilde{p}_2^*$ thus evaluation in rest frame or CMS is preferable.
- Invariant mass M_{inv}: $\tilde{P}_{\mathrm{tot}}^2 \equiv M_{\mathrm{inv}}^2 c^2$ and is thus conserved and invariant.
- Index notation: $x^\mu = (ct, \vec{x})$, $u^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$, $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, $\tilde{a} \cdot \tilde{b} = a^\mu b_\mu$.

Some mathematical formulas

- $e^z = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$, $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $z = |z|e^{i\alpha}$.
- $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$; $\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$;
- $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots$; $\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \cdots$;
- $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.
- $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ $(\cos(z) \neq 0)$; $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$ $(\cosh(z) \neq 0)$.
- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$, $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.
- $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\cos(z)}{\mathrm{d}z} = -\sin(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\cosh(z)}{\mathrm{d}z} = \sinh(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\arccos(z)}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\sin(z)}{\mathrm{d}z} = \cos(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\sinh(z)}{\mathrm{d}z} = \cosh(z)$, $\dfrac{\mathrm{d}\arcsin(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\tan(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{d}\ln(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{\mathrm{d}\arctan(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{1+z^2}$.