

# Mechanica 2: Toets 1 (19-4-2007)

Formuleblad is bijgevoegd!

Helaas zijn niet alle onderdelen in een som onafhankelijk. Mocht je vastlopen en informatie is nodig voor het volgende onderdeel, poneer een antwoord en reken/beredeneer verder.

Veel succes!

1. (30 punten)

a. (8)

Geef de afleiding van de Lagrange vergelijkingen van de tweede soort voor een systeem met  $n$  vrijheidsgraden met Lagrangiaan  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  vanuit het principe van Hamilton ( $\delta J = 0$ ), met

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt.$$

Beschouw twee deeltjes  $P$  (massa  $m$ ) en  $Q$  (massa  $m$ ) die verbonden zijn door een starre staaf met lengte  $a$ .  $P$  kan alleen langs de horizontaal  $AB$  bewegen en  $Q$  beweegt in het  $x - z$  vlak (zie Fig. 1). Wrijving kan worden verwaarloosd.

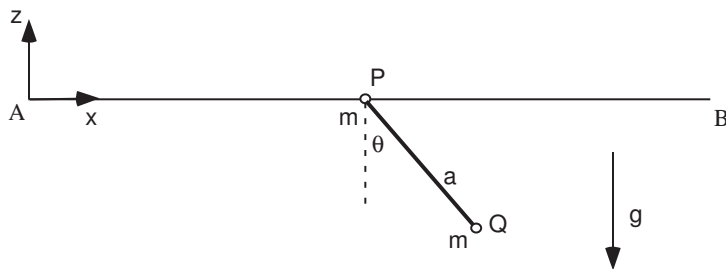


Figure 1:

b. (4)

Bepaal het aantal vrijheidsgraden  $n$  van het mechanisch systeem in Fig. 1 en kies geschikte gegeneraliseerde coördinaten  $(q_1, \dots, q_n)$ .

c. (8)

Geef de Lagrangiaan  $\mathcal{L}$  van het mechanisch systeem in Fig. 1.

d. (5)

Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor de gekoppelde bewegingen van  $P$  en  $Q$ .

Veronderstel dat  $P$  initiëel in rust is en in de oorsprong van het coördinatenstelsel is geplaatst. Op dat moment wordt  $Q$  vanuit rust losgelaten onder een hoek  $\theta_0$ . Veronderstel dat de amplitudes van de bewegingen van  $P$  en  $Q$  zeer klein zijn (zodat producten  $|\dot{x}\dot{\theta}|$  en  $\dot{\theta}^2$  verwaarloosd kunnen worden) en dat hoeken  $|\theta| \ll 1$ .

e. (5)

Bereken expliciet de beweging van zowel  $P$  en  $Q$  en geef een (korte!) verklaring voor het resulterende gedrag.

2. (30 punten)

Een starre staaf met lengte  $L$  roteert met constante hoeksnelheid  $\Omega$  om de verticale  $z$ -as (deze as staat loodrecht op het  $x - y$  vlak van de staaf), d.w.z.  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ . De oorsprong van een inertiaal stelsel  $S(x, y, z)$  bevindt zich aan één van de eindpunten van de staaf (voor het bovenaanzicht, zie Fig. 2). Een deeltje met massa  $m$  beweegt zich wrijvingsloos over de staaf.

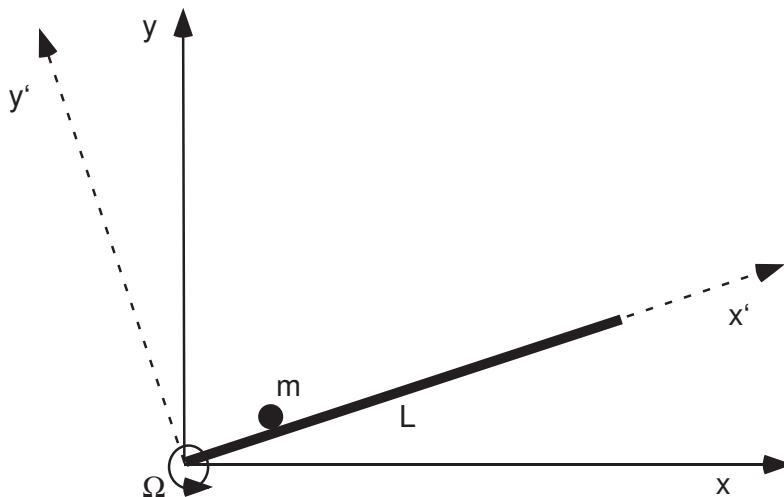


Figure 2:

In het met de staaf meedraaiende stelsel  $S'(x', y', z)$  beweegt  $m$  langs de staaf met een snelheid  $v'$ . Op  $t = 0$  vallen de assen van  $S$  en  $S'$  samen.

a. (10)

Welke krachten werken in het stelsel  $S'$  op  $m$ ? Geef de grootte en teken de richting van deze krachten.

b. (8)

Bepaal de bewegingsvergelijkingen van de massa  $m$  in het stelsel  $S'$ .

Op  $t = 0$  bevindt de massa zich in de oorsprong en heeft een snelheid  $v'_0 > 0$  langs de staaf.

c. (6)

Bepaal de positie van de de massa langs de staaf als functie van de tijd.

d. (6)

Leg uit waarom de massa naar het uiteinde van de staaf beweegt en bepaal de tijd waarop deze het eindpunt heeft bereikt.

3. (30 punten)

Een asteroïde (met massa  $m$ ) nadert de zon (met massa  $M$ ). Initiëel is de asteroïde op zeer grote afstand van de zon, heeft een constante snelheid  $V$  en beweegt zich in de richting van een rechte lijn waarop de kortste afstand tot de zon  $d$  is (zie Fig. 3). De Lagrangiaan  $\mathcal{L}$  van het zon-asteroïde systeem is gegeven door

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G\frac{mM}{r}$$

waarbij  $G$  een constante is. Tevens is  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$  de vector is tussen het centrum van de zon en de asteroïde (met de eenheidsvector  $\hat{\mathbf{r}}$ ). De hoek  $\theta$  is de hoek tussen de vector  $\mathbf{r}$  en de horizontaal.

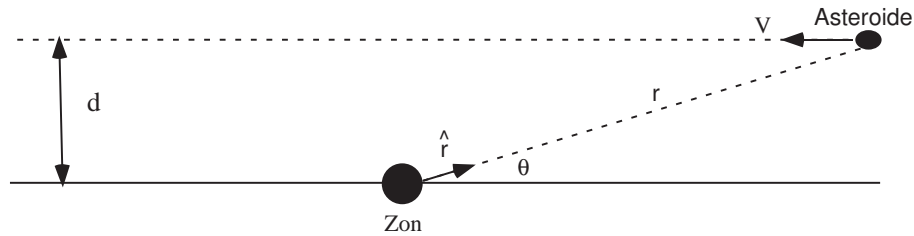


Figure 3:

a. (8)

Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor de asteroïde.

b. (8)

Laat zien dat met  $u(\theta) = 1/r(\theta)$  de vergelijking voor de baan van de asteroïde wordt gegeven door

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha_1 u = \alpha_2$$

en druk  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  uit  $d, V, M$  en  $G$ .

c. (8)

Bepaal de energievergelijking van de baan van de asteroïde. Wat voor type kegelsnede (ellips, hyperbool, parabool) wordt gevolgd door de asteroïde? Verklaar je antwoord.

Laat het punt waarop de asteroïde het dichtst bij de zon is bepaald zijn door  $r = c$ ; op dit moment heeft de asteroïde een snelheid  $V_c$ .

d. (6)

Bepaal  $c$  en  $V_c$ .

## Formuleblad

Inproduct :  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  and  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Uitproduct :  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  and  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma + \dots$$

Taylor reeks :  $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$

Krachten en arbeid :  $\vec{p} = m\vec{r}'$        $\vec{p} = \vec{F}$        $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{r}' dt$

Versnelde coördinatenstelsels :  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}' - \vec{V}_0$        $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{A}_0$

Cylindrisch :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$        $\vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$   
 $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}$

Sferisch :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$        $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin(\theta) \dot{\phi} \hat{\phi}$

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) - r \dot{\theta}^2] \hat{r} + [r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos \theta] \hat{\theta} + [r \ddot{\phi} \sin(\theta) + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin(\theta) + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta)] \hat{\phi}$$

Lagrange :  $L = K - V$        $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Polaire vergelijking van ellips (met halve lange as  $a$  en halve korte as  $b$ ):

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{a}{b^2} (1 + \varepsilon \cos \theta), \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Polaire vergelijking van hyperbool (met afstand  $2a\varepsilon$  tussen de brandpunten en asymptoten  $y = \pm b/a$ ):

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{a}{b^2} (\pm 1 + \varepsilon \cos \theta), \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$