Mechanica 2: Proeftentamen (28-6-2007)

Formuleblad is bijgevoegd!
Helaas zijn niet alle onderdelen in een som onafhankelijk. Mocht je vastlopen en informatie is nodig voor het volgende onderdeel, poneer een antwoord en reken/beredeneer verder.
Veel succes!

1. (30 punten)

Beschouw een rechte boomstam in de vorm van een halve cylinder met lengte l in de y-richting, straal a en een homogene dichtheidsverdeling ρ. Neem aan dat de platte onderkant van de stam zich in het $x-y$-vlak bevindt (zie Fig. 1).

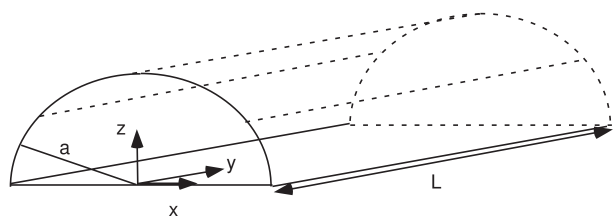

Figure 1: Situatieschets opgave 1

a. (8)
Bereken de positie van het massazwaartepunt van de halve boomstam (*Hint: Gebruik cylindercoördinaten*).

b. (10)
Bereken het traagheidsmoment I_z van de halve boomstam t.o.v. een vertikale rotatie-as die door het midden van één van de zijkanten van de boomstam gaat.

c. (6)
Bereken de gyratiestraal k voor bovengenoemde situatie.

d. (6)
Bereken het traagheidsmoment $I_{z,cm}$ van de halve boomstam t.o.v. een vertikale rotatie-as die door het massazwaartepunt gaat.

2. (30 punten)

N.B. In deze opgave worden grootheden relatief t.o.v. het massazwaartepuntstelsel aangegeven met een $_*$ subscript. Grootheden na de botsing worden aangegeven met een $'$ superscript.

Een bal (homogene dichtheid, massa m, straal R) glijdt over een tafel met constante snelheid v. Het oppervlak van de tafel is perfect glad, zodat de bal niet roteert (Fig. 2). Op zeker moment botst deze bal op een stilliggende bal met straal R en massa $2m$. Tijdens deze botsing is er geen sprake van energieverlies. Na de botsing maakt de snelheidsvector $\mathbf{v}'_{1*}$ van de eerste bal in het massazwaartepuntsstelsel een hoek $\theta = 60°$ met de snelheidsvector $\mathbf{v}_{1*}$ van voor de botsing. Ook dan is er sprake van perfect glijdende ballen.

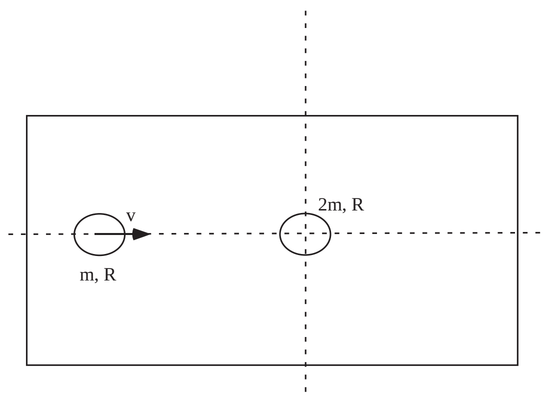

Figure 2: Situatieschets bij opgave 2 in het geval voor de botsing.

a. (8)
Laat zien dat de grootte van de translatiesnelheid v'_1 van de eerste bal in het laboratoriumstelsel na de botsing gelijk is aan $v'_1 = \alpha v$ en bepaal α.

b. (8)
Bereken de hoek ϕ_1, die de snelheidsvector $\mathbf{v}'_1$ van de eerste bal na de botsing in het laboratoriumstelsel maakt met diens snelheidsvector $\mathbf{v}_1$ van voor de botsing. Voorzie je antwoord van een duidelijke situatieschets (*vergeet niet het formuleblad te raadplegen*).

Beschouw dezelfde situatie als hierboven, maar nu is het oppervlak van de tafel perfect ruw, zodat de ballen over het oppervlak rollen (zonder te slippen). In dit geval is v gedefiniëerd als de translatiesnelheid van het massazwaartepunt van de eerste bal voor de botsing. Ook hier is verstrooingshoek $\theta = 60°$.

c. (8)
Toon aan dat de totale relatieve (gemeten in het cm-stelsel) kinetische T_* energie van het systeem voor de botsing is gegeven door $T* = \beta m v^2$. Bepaal de waarde van β.

d. (6)
Bereken, voor de situatie van perfect rollende ballen, de grootte van de hoeksnelheid ω'_1 van de eerste bal na de botsing.

3. (30 punten)

Een symmetrische tol (massa m, traagheidsmomenten I en I_s, massazwaartepunt op afstand l van het contactpunt met de grond) voert een gedwongen rotatiebeweging uit onder invloed van de zwaartekracht (grootte g). Gezien vanuit het inertiaalstelsel Oxyz is de hoek θ tussen de symmetrie-as en de z-as constant (Fig. 3).

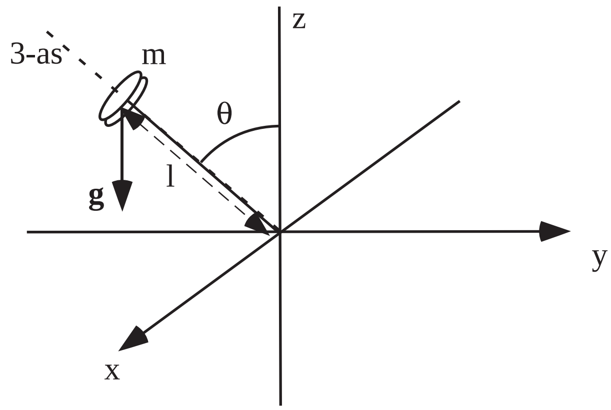

Figure 3: Situatieschets bij opgave 3

Gebruik het coordinatenstelsel O123 om de beweging van de tol te analyseren en kies de symmetrie-as als 3-as.

a. (6)
Formuleer de Eulervergelijkingen voor de gegeven situatie, waarbij het krachtmoment wordt genoteerd met **N**.
Geef tevens een fysische interpretatie van deze vergelijkingen en de betekenis van de coördinaatassen.

b. (6)
Er geldt $\omega_3 = S$, met S constant, en dat $N_1 = N\cos(St), N_2 = N\sin(St)$.
Leg uit waarom dit het geval is en druk N uit in bekende grootheden van het probleem.

c. (8)
Toon aan dat uit de Eulervergelijkingen volgt dat

$$\ddot{\omega}_2 \; + \Omega^2 \omega_2 \; = \; B \, \cos(St)$$

Druk de constantes Ω en B uit in bekende grootheden.

d. (6)
Beschrijf kwalitatief de algemene oplossing van de vergelijking voor ω_2 en interpreteer het resultaat fysisch.

e. (4)
Leg uit m.b.v. de impulsmomentwet uit waarom, gezien vanuit het inertiaalstelsel, de tol gaat precesseren en geef de richting van de precessiebeweging (geef een duidelijke situatieschets)?