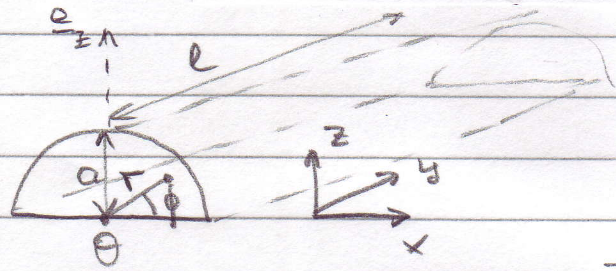
Uitwerkingen proeftentamen 28 - 6 - 2007



$$m = \frac{\pi}{2} a^2 \cdot l \cdot \rho$$

$$\rightarrow \quad \rho = \frac{2m}{\pi a^2 l}$$

1

a. Symmetrie : $x_{cm} = 0$, $y_{cm} = \frac{l}{2}$

Voor z_{cm} ; gebruik cylindercoördinaten (r, ϕ, y)

$$x = r \cos \phi$$
$$z = r \sin \phi$$

$$z_{cm} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \int_0^{l} \rho \, r \, r \sin\phi \, dr \, d\phi \, dy$$

$$= \frac{2}{\pi a^2 l} \cdot l \cdot \frac{1}{3} a^3 \cdot 2 = \frac{4a}{3\pi}.$$

b. Traagheidsmoment om z-as :

$$I_z = \int_V \rho \left(x^2 + y^2 \right) d^3x$$

$$= \int_0^{l} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho \, r^2 \cos^2\phi \, r \, dr \, d\phi \, dl \quad +$$

$$+ \int_0^{l} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho \, r \, y^2 \, dr \, d\phi \, dl$$

$$I_I = \rho \cdot l \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} a^4 + \rho \pi \cdot \frac{1}{3} l^3 \cdot \frac{1}{2} a^2$$

$$= \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

c. $$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{3} l^2} .$$

d. Gebruik // - assen theorema

$$I_{I,cm} = I_I - m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

2.a Snelheid CM : $\underline{v}_{cm} = \dfrac{m\underline{v}_1 + 2m\underline{v}_2}{3m}$

$$= \frac{1}{3}\,\underline{v}_1$$

Relatieve snelheid : $v_{1*} = \underline{v}_1 - \underline{v}_{cm}$

$$= \frac{2}{3}\,\underline{v}_1$$

Impulsvgl in CM & energievergelijking:

$$p_{1*} = -p_{2*} \longrightarrow p_{1*}^2 = p_{2*}^2$$

$$p'_{1*} = -p'_{2*} \longrightarrow p'^2_{2*} = p'^2_{1*}$$

$$\frac{p_{1*}^2}{2m} + \frac{p_{2*}^2}{4m} = \frac{p'^2_{1*}}{2m} + \frac{p'^2_{2*}}{4m}$$

$$\longrightarrow \frac{3}{4}\,p_{1*}^2 = \frac{3}{4}\,p'^2_{1*} \longrightarrow v_{1*} = v'_{1*}$$

In lab stelsel :

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_{cm} + \underline{v}'_{1*}$$

$$\longrightarrow v'^2_1 = v_{cm}^2 + 2\,\underline{v}_{cm}\cdot\underline{v}'_{1*} + v'^2_{1*}$$

$$= \frac{1}{9}v_1^2 + 2\,\frac{1}{3}v_1\,\frac{2}{3}v_1\cos 60 + \frac{4}{9}v_1^2$$

$$= \frac{7}{9}\,v_1^2$$

$$\rightarrow v'_1 = \frac{1}{3}\sqrt{7}\;v_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

b. Scheve botsing met $Q = 0$

$$\rightarrow \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta} = \frac{\sin 60}{\frac{1}{2} + \cos 60} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \quad \phi_1 = 40.9^\circ .$$

c $\underline{v}_{1*} = \frac{2}{3} \underline{v}_1$ en $\underline{v}_{2*} = -\frac{1}{3} \underline{v}_1$

$$I_1 = \frac{2}{5} m R^2 \quad , \quad I_2 = \frac{4}{5} m R^2$$

$$\rightarrow \quad T_* = \frac{1}{2} m v_{1*}^2 + m v_{2*}^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$= \frac{m}{2} \frac{4}{9} v^2 + \frac{m}{9} v^2 + \frac{1}{5} m R^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{8}{15} m v^2 \quad \rightarrow \quad \beta = 8/15$$

d Bij identieke condities is er geen reden waarom de translatiesnelheid na botsing bij rollen zal afwijken van die na botsing bij glijden. Gebruik dus onderdeel a.

$$v_1' = \frac{1}{3}\sqrt{7}\, v \quad \rightarrow \quad \omega_1' = \frac{1}{3}\sqrt{7}\, \frac{v}{R} .$$

3.a

$$N_1 = I\,\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\,(I_3 - I)$$

$$N_2 = I\,\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1\,(I - I_3)$$

$$N_3 = I_3\,\dot{\omega}_3$$

De kruistermen zijn het gevolg van het feit dat $O123$ met het voorwerp meeroteert.

b. $\underline{N} \perp \underline{g}$ en $\underline{N} \perp$ 3-as, dus $N_3 = 0$

$$\rightarrow \quad \dot{\omega}_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_3 = S$$

$N \parallel x'$-as in het $x'y'$-vlak

heeft grootte $N = mgl\sin\theta$

$$\rightarrow \begin{cases} N_1 = N\cos St \\ N_2 = N\sin St \end{cases}$$

als $O123$ en $O_{x'y'z'}$ op $t=0$ samen vallen

c. Invullen in Euler vgl:

$$\begin{cases} N\cos St = I\,\dot{\omega}_1 + \omega_2 S\,(I_3 - I) \\ N\sin St = I\,\dot{\omega}_2 + \ldots\,(I - I_3) \end{cases}$$

Eliminatie van ω_1 leidt tot :

$$(*) \qquad \ddot{\omega}_2 + \frac{S^2 (I - I_s)^2}{I^2}\,\omega_2 = NS\frac{I_s}{I^2}\cos St$$

$$\rightarrow \qquad \Omega = \left|\frac{S(I-I_s)}{I}\right|$$

$$B = NS\frac{I_s}{I^2} = mgl\sin\theta \; S\frac{I_s}{I^2}$$

d. (*) is een geforceerde harmonische oscillator zonder demping; oplossingen staan in sectie 3.6. Resonantie is niet mogelijk omdat $S \neq \Omega$. Algemene opl

$$\omega_2 = A_1\cos(\Omega t - \tilde{\phi}) + A_2\cos St$$

e. In het inertiaalstelsel geldt

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{N} \quad\rightarrow\quad d\underline{L} = \underline{N}\,dt$$

$\underline{N} = \underline{r}_{cm} \wedge m\underline{g}$, loodrecht op $\underline{L}$ (uit papier). $\dot{\theta} = 0 \rightarrow$

$\underline{L}$ in vlak opgespannen door symmetrie-as