Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2007-2008 gegeven door .

Mechanica 2 (NS-350b)
17-04-2008

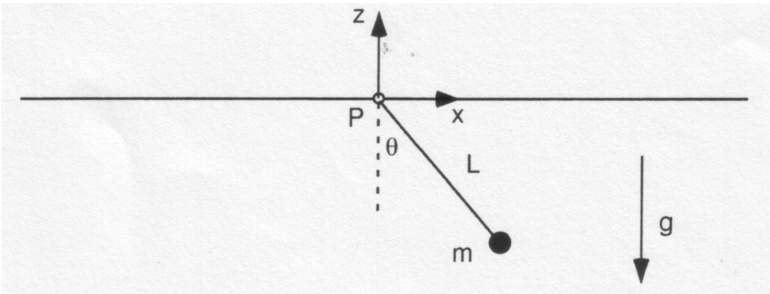
Formuleblad is bijgevoegd.

Opgave 1.

(30 punten) Beschouw een slinger die bestaat uit een massa m die door een massaloze staaf met lengte L is bevestigd aan een ophangpunt P. Het ophangpunt maakt een voorgeschreven horizontale oscillerende beweging met

$$x(t) = A\,cos\,\omega t$$

waarbij x de horizontale coördinaat aangeeft () en ω constant is. Wrijving kan worden verwaarloosd. De slinger beweegt in het $x-z$-vlak.



Figuur 1:

a) *(8 punten)*
Geef de afleiding van de Lagrange vergelijkingen voor een systeem met n vrijheidsgraden met Langrangiaan $\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ vanuit het principe van Hamilton ($\delta J = 0$), met

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt.$$

b) *(4 punten)*
Leg uit hoeveel vrijheidsgraden (n) het mechanisch systeem in heeft en kies geschikte gegeneraliseerde coördinaten $(q_1, \ldots, q_n)$.

c) *(8 punten)*
Geef de Langrangiaan $\mathcal{L}$ en bepaal de bewegingsvergelijkingen van het mechanisch systeem in .

Veronderstel nu dat de amplitude van de uitwijking van de slinger klein is ($|\theta| \ll 1$).

d) *(5 punten)*
Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor de massa m geschreven kan worden als

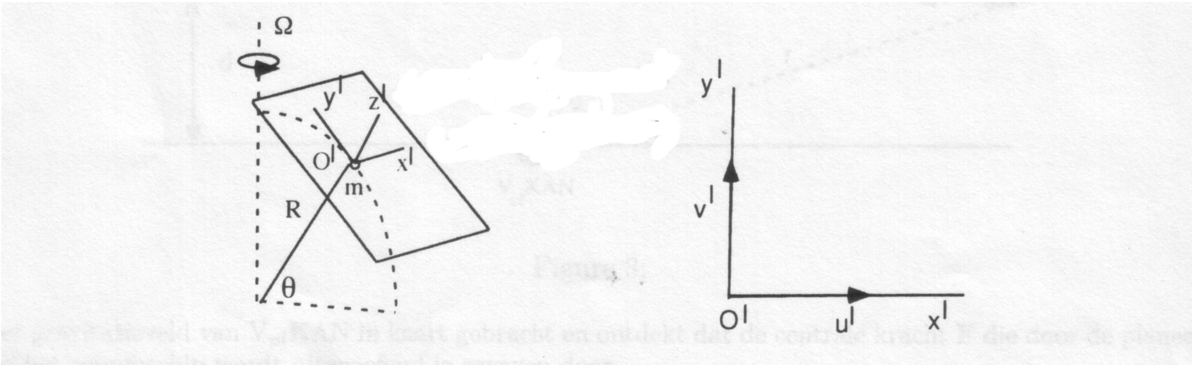
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \alpha\omega^2 cos\,\omega t$$

en druk ω_0 en a uit in gegeven grootheden.

e) *(5 punten)*
Leg uit wat er gebeurt met de amplitude van de beweging van de massa m in het geval $\omega \to \omega_0$.

Opgave 2.

(30 punten) De beweging van een puntdeeltje (massa m) op de roterende aarde (met constante hoeksnelheid Ω) wordt beschreven ten opzichte van een lokaal roterend Carthesisch $Ox'y'z'$ assenstelsel met oorsprong O' op breedtegraad θ. De kracht $\mathbf{F}$ op het deeltje bestaat uit drie bijdragen: een constante drukkracht $\mathbf{F}_p$ (wordt hieronder nader beschreven), de zwaartekracht $\mathbf{F}_g$ en een wrijvingskracht $\mathbf{F}_w = -m\gamma\mathbf{v}'$. Hierbij is $\gamma > 0$ een constante wrijvingscoëfficient en $\mathbf{v}' = (u', v', w')$ de snelheid in het $Ox'y'z'$ stelsel.



Figuur 2:

a) *(8 punten)*
Wat zijn de algemene bewgingsvergelijkingen voor het deeltje in het stelsel $Ox'y'z'$?

Neem nu aan dat het deeltje beweegt in een equipotentiaalvlak van de zwaartekracht. Stel verder dat de drukkracht in dit vlak alleen een component (ter grootte $mP > 0$) heeft in de y' richting.

b) *(8 punten)*
Toon aan dat, als termen die evenredig zijn met Ω^2 mogen worden verwaarloosd, de beweging van het deeltje in het $x' - y'$ vlak wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\frac{du'}{dt} - fv' = -\gamma u', \qquad \frac{dv'}{dt} + fu' = P - \gamma v', \tag{1}$$

en druk de parameter f uit in gegeven grootheden.

c) *(8 punten)*
Bepaal van bovenstaande vergelijking (1) een stationaire (voor $t \to \infty$) oplossing voor de snelheidscomponenten u' en v'. Schets tevens voor deze situatie de krachten die, in het beschouwde vlak, op de puntmassa werken.

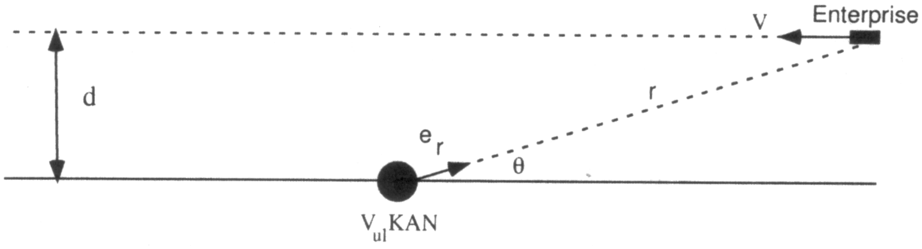
d) *(6 punten)*
Beschouw nu het geval dat $\gamma = P = 0$. Bepaal de algemene oplossing van (1) voor het snelheidsveld van het deeltje als functie van de tijd en geef een fysische interpretatie van de beweging van het deeltje.

Opgave 3.

(30 punten) De motoren van het Starship Enterprise (met massa m) zijn uitgevallen. Mr. Zulu heeft berekend (zonder rekening te houden met het gravitatieveld van V_{ul}KAN) dat het ruimteschip, met de huidige constante snelheid V (zie figuur), de planeet V_{ul}KAN op een afstand d zal missen. Scotty heeft echter het gravitatieveld van V_{ul}KAN in kaart gebracht en ontdekt dat de centrale kracht $\mathbf{F}$ die door de planeet op het ruimteschip wordt uitgeoefend is gegeven door

$$\mathbf{F} = -\frac{m\gamma}{r^3}\mathbf{e}_r$$

waarbij $\gamma > 0$ een constante is. Hierbij is $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ de vector tussen het centrum van Enterprise en dat van V_{ul}KAN (met de eenheidsvector $\mathbf{e}_r$). De hoek θ is zoals aangegeven in en initiëel geldt dat $\theta = 0$.



Figuur 3:

a) *(6 punten)*
Bepaal de Lagrangiaan van deze situatie.

b) *(8 punten)*
Laat zien dat met $u(\theta) = 1/r(\theta)$ de vergelijking voor de baan van Enterprise wordt gegeven door

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha u = 0$$

en druk α uit in d, V en γ.

c) *(6 punten)*
Formuleer de begincondities voor r en bepaal de oplossing $r(\theta)$.

Mister Spock heeft snel de constante $\alpha = 1/9$ uitgerekend.

c) *(6 punten)*
Beschrijf de baan van Enterprise en bereken de waarde van θ waarop Enterprise het dichtst bij V_{ul}KAN is.

d) *(4 punten)*
Wat is op dat moment de afstand van Enterprise tot de planeet en wat is de snelheid van Enterprise?

Formuleblad

$$\text{Inproduct} \ : \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ and } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\text{Uitproduct} \ : \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ and } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \to \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma + \ldots$$

$$\text{Taylor reeks} \ : \ f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

$$\text{Krachten en arbeid} \ : \ \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \qquad \dot{\vec{p}} = \vec{F} \qquad W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\, \mathrm{d}t$$

$$\text{Versnelde coordinatenstelsels} \ : \ \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}\,' - \vec{V}_0 \qquad \vec{a}\,' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - \vec{A}_0$$

$$\text{Cylindrisch} \ : \ \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z} \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\,\hat{\phi} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{\phi} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

$$\text{Spherisch} \ : \ \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\,\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - r\dot{\theta}^2]\,\hat{r} + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos\theta]\,\hat{\theta} + [r\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)]\,\hat{\phi}$$

$$\text{Lagrange} \ : \ L = K - V \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Polaire vergelijking van ellips (met halve lange as a en halve korte as b):

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{a}{b^2}(1 + \varepsilon\ \cos\theta), \ \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Polaire vergelijking van hyperbool (met afstand $2a\varepsilon$ tussen de brandpunten en asymptoten $y = \pm b/a$):

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{a}{b^2}(\pm 1 + \varepsilon\ \cos\theta), \ \varepsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$