

## Oefentoets Mechanica2

### Opgave 1: Deeltje in krachtveld

Een deeltje met massa  $m$  beweegt in een plat vlak in een krachtveld

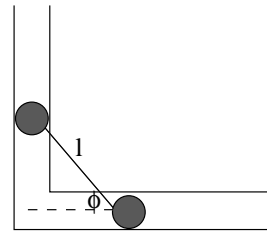
$$\mathbf{F}(x, y) = (4 - x^2 - y^2)\hat{\mathbf{x}} - (2xy + y^2)\hat{\mathbf{y}},$$

waarin  $\hat{\mathbf{x}}$  en  $\hat{\mathbf{y}}$  eenheidsvectoren zijn in de  $x$ - en de  $y$ -richting.

1. Toon aan dat dit krachtveld conservatief is.
2. Bereken de potentiële energie die bij dit krachtveld hoort.
3. In welke vier punten is het deeltje in evenwicht.
4. Bereken de twee hoekfrequenties van kleine trillingen in een stabiele evenwichtsstand in de richting van de  $x$ -as en de  $y$ -as.

### Opgave 2: Draaiende halter

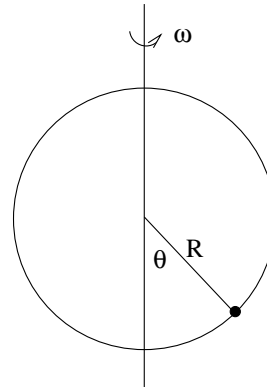
Twee massapunten, elk met massa  $m$  zijn door een massaloze stang met lengte  $l$  met elkaar verbonden. Een massapunt wordt door een goot gedwongen langs de positieve  $x$ -as te bewegen terwijl de andere massa alleen langs de  $y$ -as kan bewegen. Op de verticaal bewegende massa werkt de zwaartekracht  $mg$ . Er is geen wrijving.



- a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem
- b) Bereken de Lagrangiaan in termen van de hoek  $\phi$  die de halter maakt met de horizontale  $x$ -as.
- c) Geef de bewegingsvergelijking en leid vervolgens af dat  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l}\sin\phi = C$ , waarin  $C$  een constante is die volgt uit de randvoorwaarden.
- d) Geef aan hoe deze differentiaalvergelijking opgelost kan worden.

### Opgave 3: Kraal op roterende ring

Een kraal met massa  $m$  kan wrijvingsloos bewegen over een ring met straal  $R$ . De ring draait met een constante hoeksnelheid  $\omega$  rond een verticale as. Op de massa werkt ook de zwaartekracht.



- a) Vind de bewegingsvergelijking voor de getekende hoek  $\theta$ .
- b) Bereken de evenwichtsposities en beredeneer welke stabiel zijn.
- c) Bereken de frequentie van een kleine trilling om het stabiele evenwichtspunt.

### Opgave 4: Vallende regendruppel

Een bolvormige regendruppel valt in een wolk van oververzadigde waterdamp in het (constante) zwaartekrachtsveld van de aarde. Tijdens de val neemt de massa van de druppel door condensatie toe, de massatoename per tijdseenheid,  $dm/dt$  is evenredig met het oppervlak van de druppel met evenredigheidsconstante  $k$ . Op het tijdstip  $t = 0$  geldt  $v = 0$  en  $r = 0$ . Noem de valversnelling  $g$  en de dichtheid van het water  $\rho$ , er is geen wrijving.

- a) Bereken de straal van de druppel als functie van de tijd.
- b) Geef de bewegingsvergelijking
- c) Probeer een oplossing te vinden waarin de snelheid van de druppel lineair toeneemt met de tijd (constante vernelling). Bereken deze versnelling.
- d) Extra: Bereken de kinetische energie van de druppel op het tijdstip  $t = T$ . Bereken ook de arbeid die de zwaartekracht tot dit tijdstip op de druppel verricht heeft. Waarom zijn deze grootheden niet aan elkaar gelijk?