Oefentoets Mechanica2

Opgave 1: Deeltje in krachtveld

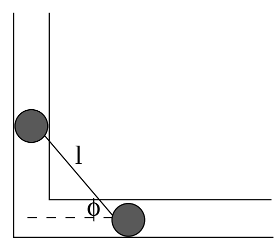
Een deeltje met massa m beweegt in een plat vlak in een krachtveld

$\mathbf{F}(x, y) = (4 - x^2 - y^2)\hat{\mathbf{x}} - (2xy + y^2)\hat{\mathbf{y}}$,

waarin $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$ eenheidsvectoren zijn in de x- en de y-richting.

1. Voorwaarde conservatief: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$, Invullen van F_x en F_y geeft $-2y = -2y$.
2. Uit $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 4 - x^2 - y^2$, volgt $U(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 4x + f(y)$. Dit kunnen we partieel naar y differentieren om $-F_y$ te vinden: $2xy + \frac{df(y)}{dy} = 2xy + y^2$, hieruit volgt $f(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$, waarin C een constante is. Dus $U(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 4x + \frac{1}{3}y^3 + C$.
3. In evenwicht zijn de krachten nul. Uit $F_y = 0$ volgt $y = 0$ of $x = -y/2$. In combinatie met $F_x = 0$ resulteert dit in de volgende 4 punten $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5})$, $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{4}{5}\sqrt{5})$.
4. De effectieve veerconstanten worden gegeven door de tweede afgeleiden van de potentiele energie U in de evenwichtspunten: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2x$ en $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2x + 2y$. Er is maar een stabiel punt: $(2, 0)$. In dit punt zijn de frequenties $\omega = \sqrt{4/m}$ langs beide assen.

Opgave 2: Draaiende halter



Twee massapunten, elk met massa m zijn door een massaloze stang met lengte l met elkaar verbonden. Een massapunt wordt door een goot gedwongen langs de positieve x-as te bewegen terwijl de andere massa alleen langs de y-as kan bewegen. Op de verticaal bewegende massa werkt de zwaartekracht mg. Er is geen wrijving.

a) Het systeem heeft één vrijheidsgraad.

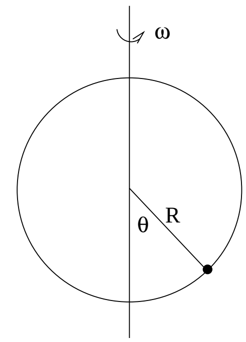
b) Coordinaten van de massa in de verticale goot $x_1 = 0$, $y_1 = l\sin\phi$, in de horizontale goot: $x_2 = l\cos\phi$, $y_2 = 0$. De kinetische energie wordt $T = \frac{1}{2}m(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$. De potentiele energie is gelijk aan $U = mgy_1 = mgl\sin\phi$. Hiermee wordt de Lagrangiaan $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl\sin\phi$.

c) Met de Euler-Lagrangevergelijking volgt $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\cos\phi = 0$. Vermenigvuldig de vergelijking met $\dot{\phi}$ en integreer: $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l}\sin\phi = C$, waarin C een constante is die volgt uit de randvoorwaarden. (Alternatief, uit energiebehoud volgt $T + U =$ constant).

d) De differentiaalvergelijking kan opgelost worden door het scheiden van de variabelen: $\int dt = \int \frac{d\phi}{\sqrt{C - \frac{2g}{l}\sin\phi}}$. Het vervolg moet numeriek.

Opgave 3: Kraal op roterende ring

Een kraal met massa m kan wrijvingsloos bewegen over een ring met straal R. De ring draait met een constante hoeksnelheid ω rond een verticale as. Op de massa werkt ook de zwaartekracht.



a) De snelheid van de ring heeft twee loodrecht op elkaar staande componenten: $T = \frac{1}{2}m(\omega^2 R^2 \sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2)$. De potentiele energie is gelijk aan $U = mgR\cos\theta$. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\omega^2 R^2 \sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta)$. Bewegingsvergelijking (Euler-Lagrange): $R\ddot{\theta} = (\omega^2 R\cos\theta - g)\sin\theta$

b) In evenwicht geldt $\ddot{\theta} = 0$, dus of $\sin\theta = 0$, met $\theta = 0$ of $\theta = \pi$, of $\cos\theta = g/(\omega^2 R)$, maar dit kan alleen als $\omega^2 \geq g/R$. Er zijn dus twee situaties:

1. $\omega^2 < g/R$. In dit geval is $\theta = \pi$ labiel. Intuitief lijkt dit vanzelfsprekend, door de zwaartekracht valt de kraal omlaag. We kunnen ook ontwikkelen rond $\theta = \pi$ door $\theta = \pi + \epsilon$ in te vullen en Taylor toe te passen op de cosinus en de sinusfunctie, $\ddot{\epsilon} - \epsilon(\omega^2 + g/R) = 0$. De oplossing hiervan is een exponentiele groei van ϵ. In het geval dat $\theta = 0$ krijgen we voor kleine hoeken: $\ddot{\theta} + \theta(-\omega^2 + g/R) = 0$. Dit is een trilling met frequentie $\sqrt{g/R - \omega^2}$

2. $\omega^2 \geq g/R$. Nu zijn zowel de posities $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ instabiel. Voor $\theta = 0$ draait het teken in de bewegingsvergelijking (zie boven) om en we krijgen een exponentiele toename. In het geval dat $\cos\theta_0 = g/(\omega^2 R)$ substitueren we weer $\theta = \theta_0 + \epsilon$ en vinden met Taylor $\ddot{\epsilon} + (\omega^2 \sin^2\theta_0)\epsilon = 0$, een trilling met frequentie $\omega\sin\theta_0 = \sqrt{\omega^2 - g^2/\omega^2 R^2}$.

Opgave 4: Vallende regendruppel

Een bolvormige regendruppel valt in een wolk van oververzadigde waterdamp in het (constante) zwaartekrachtsveld van de aarde. Tijdens de val neemt de massa van de druppel door condensatie toe, de massatoename per tijdseenheid, dm/dt is evenredig met het oppervlak van de druppel met evenredigheidsconstante k. Op het tijdstip $t = 0$ geldt $v = 0$ en $r = 0$. Noem de valversnelling g en de dichtheid van het water ρ, er is geen wrijving.

a) Er is gegeven dat $dm/dt = k4\pi r^2$, verder geldt $m = \frac{4}{3}\rho r^3$, dus $dr/dt = k/\rho$, waaruit volgt $r = kt/\rho$.

b) Bewegingsvergelijking: $mg = mdv/dt + v_r dm/dt$, waarin v_r de relatieve snelheid is van de damp t.o.v. de druppel. Hier geldt $v_r = v$. Invullen van $m(t)$ resulteert in $g = dv/dt + 3v/t$.

c) Probeer als oplossing $v = bt$ met b een constante, dit levert $b = g/4$.

d) De kinetische energie van de druppel op het tijdstip T is gelijk aan $\frac{1}{2}m(t)v^2(t) = \frac{\pi k^3 g^2}{24\rho^2}T^5$. De arbeid die de zwaartekracht tot dit tijdstip op de druppel verricht heeft is gelijk aan $\int m(t)gdx = \int_0^T m(t)g\frac{dx}{dt}dt = \frac{4\pi g k^3}{3\rho^2}\int_0^T t^3 \frac{1}{4}gtdt = \frac{\pi k^3 g^2}{15\rho^2}T^5$. De verrichte arbeid is groter dan de toename van de kinetische energie omdat de botsing tussen de druppel en damp inelastisch is waarbij mechanische energie wordt omgezet in warmte.