Eind Tentamen- "Thermische Fysica 2" (NS-355B)

3 februari 2011

Duur van het tentamen: 3 uur

1. Gebruik een apart vel voor elke opgave.

2. Schrijf je naam op alle blaadjes, schrijf op het eerste blad ook je adres en studentnummer.

3. Schrijf duidelijk, onduidelijk werk wordt niet nagekeken.

4. Het is NIET toegestaan om boeken of aantekeningen te gebruiken.

5. Als je twijfelt over een voorfactor: geef hem een naam en bepaal de dimensies van de voorfactor.

6. Het tentamen bestaat uit 3 opgaven en een formuleblad.

Van der Waals gas

1. De toestandsfunctie van een Van der Waals gas wordt gegeven door

$$\left(p + N^2 a/V^2\right)(V - Nb) = N k_{\mathrm{B}} T.$$

   (a) (0.5) Wat zijn de dimensies van de parameters a en b? Wat is de fysische interpretatie van b? De parameter a bevat een energieschaal; welke energie is dit?

   (b) (1.0) Leid de Helmholtz vrije energie af voor het Van der Waalsgas. Bedenk dat de enige lengteschaal in het systeem de thermische golflengte λ_{th} is en kies dan een geschikte integratieconstante.

   (c) (1.0) Bereken de entropie en de chemische potentiaal van het gas. Bespreek de fysische redenen voor het verschil tussen je antwoorden en de antwoorden voor een ideaal gas.

   (d) (0.5) Bespreek hoe belangrijk de parameters a en b zijn in de limiet voor hoge temperatuur en de limiet voor lage temperatuur.

Fluctuaties in Bose en Fermi Gassen

2. Het atoom ^{3}He heeft spin $1/2$ en is een fermion. Vloeibaar ^{3}He kan gezien worden als een gas van fermionen zonder interactie.

(a) (0.5) Laat zien dat voor een enkele baan,

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = \langle N \rangle \left(1 - \langle N \rangle\right),$$

waarbij $\langle N \rangle$ het gemiddelde aantal deeltjes is in die baan (= toestand), en waarbij per definitie geldt dat $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$.

(b) (1.0) Voor welke waardes van $\langle N \rangle$ verdwijnen de fluctuaties? Voor welke waarde van $\langle N \rangle$ zijn de fluctuaties maximaal? Bij welke energieën verwacht je deze drie limieten/regimes te vinden? Leg uit waarom fysisch gezien de fluctuaties deze waarden hebben in deze limieten/regimes.

(c) (0.5) Het atoom ^{4}He is een boson. Je hebt in de opgaven gezien dat de fluctuaties in een baan in een boson gas wordt gegeven door

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = \langle N \rangle \left(1 + \langle N \rangle\right).$$

Wat gebeurt er voor $\langle N \rangle \gg 1$, en voor welke energie verwacht je dat dit gebeurt? Vergelijk je antwoord met het antwoord voor ^{3}He.

Magnonen in Antiferromagneten

3. Ferromagnetische en antiferromagnetische materialen hebben excitaties die "spingolven" of "magnonen" worden genoemd. Deze corresponderen met oscillaties van de magnetisatierichting die zich (klassiek) gedragen als golven. Zoals je hebt gezien in de opgaven wordt de dispersierelatie voor een 1D *ferromagneet* gegeven door

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J\left[1 - \cos(k_x a)\right] \ , \tag{1}$$

waarbij $J > 0$ de zogeheten "spinstijfheid" is en a de roosterconstante. Aan de andere kant is de dispersierelatie voor een 1D *antiferromagneet* gegeven door

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 = (-J)^2\left[1 - \cos^2(k_x a)\right] \tag{2}$$

met $J < 0$. Het doel van deze opgave is om de temperatuursafhankelijkheid van de warmtecapaciteit in 1D *antiferromagneten* te begrijpen.

(a) (1.0) Magnonen voldoen aan de Planck distributie. Ontwikkel de dispersierelatie voor kleine k_x en geef een uitdrukking van de interne energie U, je hoeft de integraal niet expliciet uit te voeren: Om de temperatuursafhankelijkheid van U te vinden schrijf je de integraal in termen van een dimensieloze variabele, en noem je de dimensieloze integraal I_{1D}. Bepaal vervolgens de bijdrage van de magnonen aan de warmtecapaciteit C.

(b) (1.0) Geef de uitdrukking voor $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ in twee en drie dimensies door te kijken naar vgl. (2). Bepaal ook de toestandsdichtheid $\mathscr{D}(\varepsilon)$ van magnonen in een antiferromagneet in één, twee en drie dimensies voor kleine $|\vec{k}|$.

(c) (0.5) Doe hetzelfde als in (a), maar nu in twee en drie dimensies.

(d) (0.5) Wat is de temperatuursafhankelijkheid van de warmtecapaciteit in d-dimensies? Vergelijk het resultaat voor antiferromagneten met het resultaat dat je kent voor fononen.

Magnonen zijn bosonen (ze hebben spin 1), en derhalve kunnen ze Bose-Einstein condensatie (BEC) ondergaan. Het BEC van magnonen is recentelijk gezien in een experiment in het antiferromagnetische materiaal $TlCuCl_3$. In dit experiment wordt eerst een groot magnetisch veld aangelegd om genoeg magnonen in het systeem te krijgen. Vervolgens wordt de temperatuur naar beneden gebracht tot een kritische temperatuur van een paar milli-Kelvin, waarbij de magnonen condenseren tot een BEC.

Er zijn dus twee faseovergangen in dit systeem:

i. Van een paramagnetische naar een antiferromagnetische fase. Beschouw voor het gemak de overgang zonder extern magneetveld, zodat de paramagnetische fase gewoon een ongeordende fase is.

ii. Van een antiferromagnetische fase naar een BEC.

Beantwoord de volgende vragen voor beide faseovergangen in dit materiaal:

(e) (1.0) Beschrijf in woorden wat er fysisch gebeurt tijdens de twee overgangen en geef de ordeparameters van de fase overgangen.

(f) (1.0) Bespreek de orde van beide fase overgangen en schets de vorm van de Landau vrije energie als functie van de order parameter voor $T > T_c$, $T = T_c$, en $T < T_c$, waar T_c de kritische temperatuur van de desbetreffende faseovergang is.

Enkele wellicht nuttige formules

1. Maxwell-Boltzmanndistributie: $g(\varepsilon) \propto \exp(-\varepsilon/k_B T)$
2. Planckdistributie: $f(E) = \frac{1}{e^{\beta E}-1}$
3. Fermi-Dirac- en Bose-Einsteindistributies:
   $f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}\pm 1}$, waar we + gebruiken voor fermionen en − voor bosonen.
4. Gaussische integraal: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
5. Stirlingbenadering: $\log(n!) \approx n \log n - n$
6. Thermische golflengte: $\lambda_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m k_{\mathrm{B}} T}}$

Final Exam- “Thermal Physics 2” (NS-355B)

February 3, 2011
Duration of the exam: 3 hours

1. Use a separate sheet for every exercise.

2. Write your name and initials in all sheets, on the first sheet also your address and your student ID number.

3. Write clearly, unreadable work cannot be corrected.

4. You are NOT allowed to use any kind of books or lecture notes.

5. If you have doubts about a prefactor, give it a name and determine its dimensions.

6. This exam consists of 3 exercises and a list of formulas.

Van der Waals gas

1. The state function of a Van der Waals gas is given by

$$\left(p + N^2 a/V^2\right)(V - Nb) = N k_B T.$$

(a) (0.5) What are the dimensions of the parameters a and b? What is the physical interpretation of b? The parameter a contains an energy scale, what energy is this?

(b) (1.0) Derive the Helmholtz free energy for the Van der Waals gas. Knowing that the only length scale in the system is the thermal wavelength λ_{th}, choose a suitable integration constant.

(c) (1.0) Compute the entropy and the chemical potential of the gas. Discuss the physical reasons of the difference between your answer and the answers for an ideal gas.

(d) (0.5) Discuss the importance of the parameters a and b in the high-temperature limit and in the low-temperature limit.

Fluctuations in Bose and Fermi Gases

2. The atom ^3He has spin 1/2 and is a fermion. ^3He liquid can be considered as a gas of non-interacting fermions.

(a) (0.5) Show that for a single orbital

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle (1 - \langle N \rangle),$$

where $\langle N \rangle$ is the average number of fermions in that orbital (= state), and where by definition $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$.

(b) (1.0) For what values of $\langle N \rangle$ do the fluctuations vanish? For what value of $\langle N \rangle$ are they maximal? For what energies do you expect to find these three limits/regimes? Explain physically why the fluctuations have these values in these limits/regimes.

(c) (0.5) ^{4}He atoms are bosons. You have seen in the exercises that the fluctuations in one orbit in a bose gas are given by

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle).$$

What happens when $\langle N \rangle \gg 1$, and for what energies do you expect this to be the case? Compare with the results for ^{3}He.

Magnons in Antiferromagnets

3. Ferromagnetic and antiferromagnetic materials have excitations called "spin waves" or "magnons", corresponding to oscillations in the magnetization direction that (classically) behave as waves. As you have seen in the exercises, in 1D *ferromagnets*, the dispersion relation is

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J\left[1 - \cos(k_x a)\right] \ , \tag{1}$$

where $J > 0$ is the so-called "spin stiffness" and a is the lattice constant. On the other hand, in 1D *antiferromagnets* the dispersion relation is

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 = (-J)^2 \left[1 - \cos^2(k_x a)\right] \tag{2}$$

and now $J < 0$. The aim here is to understand how the heat capacity of *antiferromagnets* depends on the temperature.

(a) (1.0) Magnons obey the Planck distribution function. Expand the dispersion in Eq. (2) for small k_x and write down an expression for the internal energy U, you do not need to compute the integral explicitly: To find the temperature dependence of U, write the integral in terms of a dimensionless variable and call the dimensionless integral I_{1D}. Then, determine the contribution of the magnons to the heat capacity C.

(b) (1.0) Give the expression for $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ in two and three dimensions, looking at Eq.(2). Then, determine the density of states $\mathscr{D}(\varepsilon)$ of magnons in antiferromagnets for one, two and three dimensions for small $|\vec{k}|$.

(c) (0.5) Perform the same calculations as in (a), but now in two and three dimensions.

(d) (0.5) How is the temperature dependence of the heat capacity for spin-waves in d-dimensions? Compare the results for antiferromagnets with the results you know for phonons.

Magnons are bosons (carry spin 1), and hence can undergo Bose-Einstein condensation (BEC). The BEC of magnons has been recently observed experimentally in the antiferromagnetic material $TlCuCl_3$. In this experiment, a large magnetic field is applied so that there are enough magnons in the system. Then the temperature is brought down to a critical temperature in the milli-Kelvin range, and the magnons condense to a BEC.

Therefore, there are two phase transitions in this material:

i. From a paramagnetic to an antiferromagnetic phase. For simplicity, consider the transition for zero external magnetic field, so that the paramagnetic phase is just a disordered phase.

ii. From an antiferromagnetic phase to a BEC.

Answer the following questions for both phase transitions in this material.

(e) (1.0) Describe in words what happens physically during the two transitions and give the order parameters of the phase transitions.

(f) (1.0) Discuss the order of both phase transitions and sketch the form of the Landau free energies as a function of the order parameter for $T > T_c$, $T = T_c$, and $T < T_c$, where T_c is the critical temperature of the phase transition considered.

Some potentially useful formulas

1. Maxwell-Boltzmanndistribution: $g(\varepsilon) \propto \exp(-\varepsilon/k_B T)$
2. Planckdistribution: $f(E) = \frac{1}{e^{\beta E}-1}$
3. Fermi-Dirac- and Bose-Einsteindistributions: $f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}\pm 1}$, where we use $+$ for fermions and $-$ for bosons.
4. Gaussian integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
5. Stirlingapproximation: $\log(n!) \approx n \log n - n$
6. Thermal wavelength: $\lambda_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m k_{\text{B}} T}}$