1

NS-355-6

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA
UNIVERSITEIT UTRECHT

TENTAMEN THERMISCHE FYSICA 2

Donderdag 20 maart 2008, 9.00-12.00 uur

1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres en studierichting.

2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

3) Het boek *Thermal Physics* van Kittel en Kroemer mag bij het tentamen gebruikt worden. Andere literatuur, zoals het werkcollegedictaat en eigen aantekeningen mogen niet worden gebruikt. Vergelijkingen die in het boek worden afgeleid mogen bekend worden verondersteld en hoeft u zelf dus niet meer af te leiden.

Opgave 1: Ionisatie van atomair waterstof

We willen proberen de ionisatiegraad van een atomair waterstof gas te begrijpen. Beschouw daartoe in een volume V, N protonen die voor het gemak verondersteld worden op verschillende vaste posities in het volume te zitten. Verder zit er in het volume een gas van M electronen met een massa m. De electronen worden verondersteld vrij te kunnen bewegen door het volume V, maar kunnen ook absorberen met bindingsenergie ϵ_H aan de protonen.

We analiseren deze situatie allereerst op kanonieke wijze.

a) Laat allereerst zien dat de toestandssom voor één electron gegeven word door

$$Z_1 = Ne^{\epsilon_H/k_BT} + \frac{V}{\Lambda^3}, \tag{1}$$

met $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_BT}$ de thermische de Broglie golflengte.

b) Bereken de kans $P_H(T)$ dat één electron gebonden is aan één proton. Schets het gedrag van $P_H(T)$ als functie van de temperatuur. (Als u $P_H(T)$ niet hebt kunnen berekenen, schets dan wat u voor gedrag verwacht.) Wat is dan het gemiddeld aantal waterstof atomen in het systeem?

c) Bepaal met behulp van vergelijking (1) nu de partitie functie Z_M voor M electronen. Bereken hiermee de chemische potentiaal μ van de electronen.

We analiseren de situatie nu ook op groot-kanonieke wijze. Beschouw hierbij de N protonen als een 'rooster' van posities waarop de electronen kunnen zitten. Merk bovendien op dat er slechts precies één electron aan elk proton gebonden kan zijn.

d) Laat zien dat de thermodynamische potentiaal van de electronen op het 'rooster' gelijk is aan

$$\Omega = -k_BTN\ln\left(1 + e^{(\epsilon_H+\mu)/k_BT}\right) . \tag{2}$$

e) Bepaal hiermee wederom het gemiddeld aantal waterstof atomen in het systeem.

f) Is het groot-kanonieke antwoord hetzelfde als het kanonieke antwoord? Beargumenteer uw antwoord en, indien mogelijk, bewijs uw antwoord met een expliciete berekening.

Opgave 2: Spin-1 ferromagneet in een magneetveld

Beschouw een oneindig d-dimensionaal kubisch rooster met spins $S_{\mathbf{m}}$ op de posities $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$, waarbij $S_{\mathbf{m}} = -1, 0, 1$ en m_i alle gehele getallen doorlopen. De hamiltoniaan van dit spinsysteem is

$$H = -J \sum_{<\mathbf{m},\mathbf{m}'>} S_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}'} - K \sum_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}} , \tag{3}$$

met $J > 0$ en de som over alle paren van naaste buren. Deze hamiltoniaan is een model voor een spin-1 ferromagneet in een magneetveld.

a) Hoeveel grondtoestanden heeft dit systeem voor een welbepaalde waarde van K? Teken ze allemaal, voor alle mogelijke waarden van $-\infty < K < \infty$.

b) Bepaal de vergelijking voor de magnetisatie $M(T, K) \equiv \langle S_{\mathbf{m}} \rangle$ met behulp van de gemiddelde veld (mean-field) theorie.

c) Wat is de kritieke temperatuur T_c voor $K = 0$? Schets het fasediagram van dit spinsysteem in het (T, K)-vlak. (Indien u onderdeel b) niet hebt kunnen afronden, geef dan de orde van groote van T_c en schets het fasediagram dat u verwacht.)

d) Bereken de vrije energie $F(T, K)$ per spin in de gemiddelde veld benadering, en laat zien dat

$$-\frac{\partial F(T, K)}{\partial K} = M(T, K) . \tag{4}$$

Opgave 1: Ionisatie van atomair waterstof

We willen proberen de ionisatiegraad van een atomair waterstof gas te begrijpen. Beschouw daartoe in een volume V, N protonen die voor het gemak verondersteld worden op verschillende vaste posities in het volume te zitten. Verder zit er in het volume een gas van M electronen met een massa m. De electronen worden verondersteld vrij te kunnen bewegen door het volume V, maar kunnen ook absorberen met bindingsenergie ϵ_H aan de protonen.

We analiseren deze situatie allereerst op kanonieke wijze.

a) Laat allereerst zien dat de toestandssom voor één electron gegeven word door

$$Z_1 = N e^{\epsilon_H / k_B T} + \frac{V}{\Lambda^3} , \tag{1}$$

met $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2 / m k_B T}$ de thermische de Broglie golflengte.

b) Bereken de kans $P_H(T)$ dat één electron gebonden is aan één proton. Schets het gedrag van $P_H(T)$ als functie van de temperatuur. (Als u $P_H(T)$ niet hebt kunnen berekenen, schets dan wat u voor gedrag verwacht.) Wat is dan het gemiddeld aantal waterstof atomen in het systeem?

c) Bepaal met behulp van vergelijking (1) nu de partitie functie Z_M voor M electronen. Bereken hiermee de chemische potentiaal μ van de electronen.

We analiseren de situatie nu ook op groot-kanonieke wijze. Beschouw hierbij de N protonen als een 'rooster' van posities waarop de electronen kunnen zitten. Merk bovendien op dat er slechts precies één electron aan elk proton gebonden kan zijn.

d) Laat zien dat de thermodynamische potentiaal van de electronen op het 'rooster' gelijk is aan

$$\Omega = -k_B T N \ln\left(1 + e^{(\epsilon_H + \mu)/k_B T}\right) . \tag{2}$$

e) Bepaal hiermee wederom het gemiddeld aantal waterstof atomen in het systeem.

f) Is het groot-kanonieke antwoord hetzelfde als het kanonieke antwoord? Beargumenteer uw antwoord en, indien mogelijk, bewijs uw antwoord met een expliciete berekening.