Institute for Theoretical Physics
Utrecht University

1

# TENTAMEN THERMISCHE FYSICA II

donderdag, 19 maart, 2009, 9:00-12:00

1) Begin iedere opgave op een nieuw vel.

2) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.

3) Schrijf duidelijk; onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

4) Schrijf bij elk antwoord een duidelijke argumentatie op.

## Opgave I: Vector Potts model (20 pt)

In het Potts model zijn spins $s_i$ geplaatst op een rooster. In deze opgave beperken we ons tot een twee-dimensionaal vierkant rooster. Cyril Domb, de promotiebegeleider van Renfrey Potts, heeft oorspronkelijk een model voorgesteld waarin deze spins vectoren zijn, die uniform verdeeld zijn over the eenheidscirkel, met gediscretiseerde hoeken, beperkt tot $q$ mogelijke waarden ($s_i \in \{0, \ldots, q-1\}$):

$$\Theta_n = \frac{2\pi s_i}{q}.$$

Hij stelde dan de volgende Hamiltoniaan voor:

$$H_c = J_c \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\Theta_{s_i} - \Theta_{s_j}),$$

waarin de sommatie loopt over naburige posities $\langle i,j \rangle$ over het hele rooster. Dit model staat bekend als het vector Potts model.

(a) Laat zien dat het ($q = 2$) vector Potts model identiek is aan het Ising model.

(b) Bepaal de relatie tussen het $q = 3$ vector Potts model en het drie-states standaard Potts model, met de Hamiltoniaan

$$H_p = -\epsilon \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(s_i, s_j),$$

waarin $\delta(x, y)$ de Kronecker deltafunctie is, die 1 is als $x = y$, en anders 0 is. (Bespreek in ieder geval het verband tussen $J_c$ en $\epsilon$.)

**Opgave II: Tweedimensionale nucleatie (25 pt)**

Beschouw het Van der Waals-gas in een twee-dimensionale ruimte. Vanuit een hoge-temperatuursconfiguratie wordt het systeem langzaam gekoeld tot net onder de binodaal. Hierdoor zal het systeem zich in een metastabiele staat bevinden, waarin (nog) geen grote druppels gecondenseerd zijn; een oververzadigde damp. De Gibbs vrije energie van grote druppels neemt af met een hoeveelheid van $\Delta\mu = \mu_l - \mu_g$ per deeltje in de druppel, met $\mu_l$ en $\mu_g$ de chemische potentiaal in de vloeistof en gasfase. Maar voor kleine druppels domineert de lijnspanning (ééndimensionale equivalent van oppervlaktespanning) $\gamma$, gedefinieerd als de toename in de vrije energie per eenheid van lengte van de grenslijn (ééndimensionale equivalent van het grensvlak).

Onder de aanname dat de druppels rond zijn, en een uniforme dichtheid $\rho_l$ hebben, geldt dat de vrije energie van een druppel als functie van het aantal $N_l$ deeltjes in die druppel gegeven is door

$$\Delta G(N_l) = a \cdot N_l + b \cdot \sqrt{N_l}$$

(a) Bepaal $a$ en $b$, uitgedrukt in $\gamma$, $\Delta\mu$ en $\rho_l$.

(b) Bepaal de hoogte van de vrije energie barrière die een druppel moet overwinnen voor nucleatie, uitgedrukt in $\gamma$, $\Delta\mu$ en $\rho_l$.

(c) Neem aan dat de grootte van de druppel zich in de tijd ontwikkelt door deeltjes die zich aansluiten bij de druppel, of loskomen van de druppel, met een constante rate $\nu$ per eenheid grenslijn lengte, zonder voorkeur voor groei of krimp, zolang de vrije energie niet minder dan $k_BT$ afwijkt van zijn maximale waarde. Maak een schatting hoe lang het gemiddeld duurt voordat een kritische druppel gegroeid danwel gekrompen is tot een grootte waarbij de vrije energie afgenomen is met $k_BT$.

(d) Gebruikmakend van de resultaten bij (b) en (c), maak een schatting voor de nucleatierate per druppel.

## Opgave III: Harmonische oscillator (20 pt)

We beschouwen een deeltje met massa $m$ in een harmonische potentiaal $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ met frequentie $\omega$. Volgens de kwantummechanica zijn de toegestane energie-eigenwaarden $E_n = n\hbar\omega$, met $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Hierbij is de nulpuntsenergie niet meegenomen.

a) Laat zien dat de partitiefunctie gegeven wordt door

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}, \tag{1}$$

waarbij $\beta = 1/(k_B T)$ met $T$ de temperatuur en $k_B$ Boltzmann's constante.

b) In het kanoniek ensemble is de kans dat het systeem zich bevindt in een toestand met energie $E_n$ evenredig met $e^{-\beta E_n}$. Geef in het kanoniek ensemble de gemiddelde energie van het deeltje in de harmonische potentiaal als functie van $\hbar\omega$ en $\beta$.

c) We beschouwen in dit subonderdeel de *klassieke* harmonische oscillator. De partitie functie wordt nu dus gegeven door

$$Z_{\text{cl}} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left\{-\beta \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right]\right\}.$$

Geef de temperatuurs- en frequentieafhankelijkheid van bovenstaande uitdrukking, zonder u om eventuele temperatuurs- en frequentieonafhankelijke voorfactoren te bekommeren. (Indien u in staat bent het volledige antwoord af te leiden en te geven mag dit natuurlijk ook!)

d) Door een geschikte limiet van Vgl. (1) te nemen, de zogenaamde klassieke limiet, krijgt u dezelfde frequentie- en temperatuursafhankelijkheid als gevonden bij onderdeel c). Wat moet u nemen voor de verhouding van $\omega$ en $T$ om deze limiet te nemen? Geef $Z$ en de gemiddelde energie uit onderdeel b) in deze limiet.

**Opgave IV: Bose-Einstein condensatie van spin-1 bosonen in een magneetveld (25 pt)**

We beschouwen een atomair gas van identieke bosonische atomen met massa $m$ en spin $S = 1$ in een magnetisch veld met sterkte $B$. Er zijn dus drie spintoestanden die door het magneetveld verschillende Zeeman energie hebben. In het onderhavige geval worden de één-deeltjes energietoestanden gegeven door $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m)$ voor de toestand met $m_S = 0$, en door $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m) \pm gB$ voor de toestanden met $m_S = \pm 1$. Hierbij is $g$ een positieve constante. We beschouwen het systeem in drie dimensies. De totale dichtheid $n$ is constant en wordt gegeven door

$$n = \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}-\mu)} - 1}\right] + \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}+gB-\mu)} - 1}\right] + \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}-gB-\mu)} - 1}\right] ,$$

met $\mu$ de chemische potentiaal.

a) Schrijf de bovenstaande vergelijking in de vorm

$$n = \left[\int_0^\infty d\epsilon\ \nu(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\right] + \left[\int_0^\infty d\epsilon\ \nu(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon+gB-\mu)} - 1}\right] + \left[\int_0^\infty d\epsilon\ \nu(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-gB-\mu)} - 1}\right] ,$$

en bepaal de toestandsdichtheid per volume $\nu(\epsilon)$.

b) De conditie voor Bose-Einstein condensatie is dat de chemische potentiaal gelijk is aan het laagste één-deeltjes energie niveau. Geef de chemische potentiaal voor $B < 0$, $B > 0$ en $B = 0$ voor het geval dat de temperatuur gelijk is aan de kritische temperatuur voor Bose-Einstein condensatie.

c) De kritische temperatuur voor Bose-Einstein condensatie is afhankelijk van het magneetiveld. Geef de vergelijking die deze kritische temperatuur $T_c(B)$ bepaalt zonder deze op te lossen. N.B.: beschouw de situaties $B > 0$, $B = 0$, en $B < 0$ afzonderlijk. U hoeft de integraal over $\mathbf{k}$ (of energie $\epsilon$) niet uit te voeren.

d) Geef de kritische temperatuur $T_c(B)$ voor $g|B| \to \infty$ en ook voor $B = 0$. Laat hieruit zien dat

$$\lim_{g|B|\to\infty} T_c(B)/T(0) = 3^{2/3}.$$

[Hint: U kunt als gegeven aannemen dat een gas van identieke spinloze bosonen met massa $m_0$ in een kubus bij dichtheid $n_0$ als kritische temperatuur $T_0$ voor Bose-Einstein condensatie heeft: $T_0 = 3.31\hbar^2 n_0^{2/3}/(m_0 k_B)$, waarbij $k_B$ Boltzmann's constante.]

e) Schets $T_c(B)$ als functie van $B$.