

## Thermische fysica 2 (NS-355b)

### 29 maart 2005

Studenten die TF2 uit het *doctoraalprogramma* volgen maken opgaven 1, 2 en 4. Studenten die het eerste deel van TF2 uit het *bachelorprogramma* herkennen maken opgaven 1, 3 en 4.

#### Opgave 1. Begripsvragen (30 punten)

- a) Wat zijn de condities voor thermodynamisch evenwicht tussen twee wisselwerkende systemen van deeltjes?
- b) Geef in woorden het fysisch verschil aan tussen het gebruik van de Boltzmann-toestandssom en de Gibbs-toestandssom. Betrek in het antwoord de kans op een toestand en het aantal toestanden.
- c) Bij het bepalen van de toestandssom  $Z$  van een ideaal gas van  $N$  deeltjes wordt voor het identiek zijn van de deeltjes gecorrigeerd door het aantal toestanden te delen door  $N!$ . Geef aan onder welke voorwaarden deze aanname juist is.

#### Opgave 2. Ortho- en para-waterstof (35 punten)

Een waterstofmolecuul  $\text{H}_2$  in de grondtoestand kan bestaan in twee vormen; orthowaterstof, waarin de kernspins van de twee waterstofatomen parallel staan ( $S = 1$ ) en parawaterstof waar de kernspins anti-parallel staan ( $s = 0$ ). De orthovorm heeft dus drie ontaarde niveaus met energie  $\varepsilon$  terwijl de paravorm één energieniveau heeft met een energie gelijk aan nul. We gaan uit van vast waterstof waarin de  $N$  waterstofmoleculen vastgeprikt zitten op roosterposities. Het systeem is in thermisch contact met een warmtereservoir met fundamentele temperatuur  $\tau = k_B T$ . Tussen de kernspins bestaan zwakke wisselwerkingen waardoor deze energie zich zal kunnen spreiden en ortho- en parawaterstof in elkaar kunnen overgaan.

- a) Wat is in de limieten  $\tau \rightarrow 0$  en  $\tau \rightarrow \infty$  de grootte van de entropie? Wat is het criterium voor een zeer hoge of zeer lage temperatuur?
- b) Bereken voor gegeven temperatuur de toestandssom  $Z(\tau)$  van de  $N$  moleculen.
- c) Bereken de gemiddelde energie van de kernspins.
- d) Benader via de vrije energie  $F$  de entropie van de kernspins.
- e) Schets de energie en de soortelijke warmte als functie van de temperatuur (deze vraag kan ook als eerste onderdeel gemaakt worden).

#### Opgave 3. Fermionen en bosonen (35 punten)

We hebben een materiaal met posities waarop we deeltjes kunnen plaatsen. Op elke positie kunnen zich nul, één of twee deeltjes bevinden. Elk deeltje bij deze toestanden geven we aan met  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$ . Interacties tussen de deeltjes worden verwaarloosd.

- a) Schrijf de Gibbs-toestandssom voor één positie uit in het geval dat de deeltjes bosonen zijn. Hoe groot is de Gibbs-toestandssom voor een systeem bestaande uit  $N$  posities?
- b) Herhaal vraag a), maar nu voor deeltjes die zich gedragen als fermionen.

We beschouwen een gas van  $N$  identieke spin- $\frac{1}{2}$  deeltjes (fermionen) opgesloten in een isotrope harmonische potentiaal waarin de energieën van de ééndeeltjestoestanden gegeven worden door  $\varepsilon = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$  waarin  $0 \leq n_\alpha < \infty$  niet-negatieve gehele getallen zijn.

- c) Hoeveel banen zijn er met een energie kleiner of gelijk aan  $\varepsilon$ ? Bereken hieruit de toestandsdichtheid  $D(\varepsilon)$ .
- d) Leid een vergelijking af voor de Fermi-energie, de energie van de hoogst gevulde baan bij  $T = 0$  K.

**Opgave 4. Bosonen in een harmonische potentiaal** **(35 punten)**

We beschouwen een gas van  $N$  identieke spin-0 deeltjes (bosonen) opgesloten in een isotrope harmonische potentiaal met energieniveau's  $\varepsilon = hf(n + 1/2)$  waarin  $n$  een niet-negatief geheel getal en  $f$  een klassieke oscillatiefrequentie is. Door de driedimensionale potentiaal zijn de niveau's ontaard. De ontaarding  $g_n$  van niveau  $n$  is  $g_n = (n + 1)(n + 2)/2$ .

- a) Bereken de toestandsdichtheid  $D(\varepsilon)$  voor een deeltje begrensd door deze potentiaal. Neem hierbij aan dat  $n$  een groot getal is.
- b) Leid een vergelijking af voor de temperatuur waarbij Bose-Einsteincondensatie van dit systeem optreedt. Beargumenteer waarom bij de afleiding de chemische potentiaal gelijkgesteld wordt aan  $\mu = 0$ . Voer bij de afleiding de afkorting  $J_m = \int_0^\infty \frac{x^m}{e^x - 1}$  in.
- c) Het volume van het condensaat kunnen we op de volgende manier afschatten. De potentiaal begrenst effectief de deeltjes tot een volume met een grootte van ruwweg de derde macht van de trillingsamplitude  $a$ . De grootte van deze amplitude kan (klassiek) geschat worden door de energie (van de orde van  $\tau_c = k_B T_c$ ) gelijk te stellen aan de potentiële energie van de trilling. Verwaarloos alle numerieke factoren zoals 2,  $\pi$  en  $J_2$ , en laat zien dat het volume gelijk is aan  $V = a^3 = N \left( \frac{\hbar}{m\tau_c} \right)^{\frac{3}{2}}$ . (*Hint:* Klassiek is er een verband tussen de frequentie en de potentiële energie van een trilling.)