Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-355b werd in 2005/2006 gegeven door dr. ir. A.F.M. Arts.

Thermische Fysica 2 (NS-355b)
10 november 2005

Opgave 1. Begrippen en inzicht *(30 punten)*

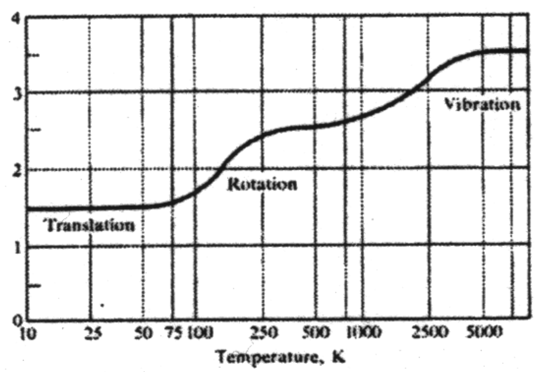
Geef korte, maar ter zake doende antwoorden!

a) Hoe luidt het fundamentele statistische postulaat?

b) Noem twee bezwaren tegen de stosszahlansatz van Boltzmann.

c) Wat zijn de condities voor thermodynamisch evenwicht tussen twee wisselwerkende systemen van deeltjes?

d) In onderstaande figuur staat de gemeten warmtecapaciteit bij constant volume van één molecuul H_2 in de gasfase als functie van de temperatuur. De verticale schaal is in eenheden k_B. Leg uit wat er fysisch aan de hand is, m.a.w. schrijf het onderschrift voor deze figuur.



e) Bij het bepalen van de toestandssom Z van een ideaal gas van N deeltjes wordt voor het identiek zijn van de deeltjes gecorrigeerd door het aantal toestanden te delen door $N!$. Geef aan onder welke voorwaarde deze aanname juist is.

f) Met het uitdijen van het heelal daalt de temperatuur van de kosmische achtergrondstraling. Geef een fysische verklaring voor dit verschijnsel.

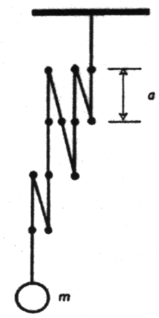
Opgave 2. Ketting aan plafond *(25 punten)*

Een ketting van N schakels van gelijke lengte a hangt aan het plafond. Een massa m is bevestigd aan het onderste segment. Op de massa werkt de zwaartekracht. Elk segment kan zich in twee toestanden bevinden, omhoog of omlaag zoals aangegeven in de schets. De massa van de segmenten verwaarlozen we.

a) Laat zien dat de toestandssom Z bij een temperatuur τ gegeven wordt door

$$Z_N = \left(1 + e^{-\alpha m/\tau}\right)^N . \tag{1}$$

Bepaal α. (Ook andere goede uitdrukkingen voor Z_N zijn mogelijk.)



b) Bereken de interne energie van de ketting en bepaal de afstand van de massa m tot het plafond. Geef het resultaat in de limieten $\tau \to \infty$ en $\tau \to 0$.

c) Laat zien dat de ketting voldoet aan de wet van Hooke, namelijk dat de afstand tot het plafond evenredig is met een *kleine* kracht (hier een kleine massa m). Bepaal de evenredigheidsconstante. (Controle: uitkomst is evenredig met τ.)

Opgave 3. Exotische deeltjes *(15 punten)*

Veronderstel dat er naast het boson en het fermion een derde deeltje zou bestaan met als eigenschap dat maximaal twee gelijke deeltjes in dezelfde ééndeeltjestoestand kunnen. Bereken, analoog aan het Bose-Einstein en Fermi-Dirac, de distributiefunctie voor het gemiddelde aantal deeltjes dat zich in een toestand met energie ε, bij een gegeven temperatuur bevindt. (Gezien het wiskundige resultaat is het maar goed dat deze deeltjes niet bestaan.)

Opgave 4. Fermionen in een anisotrope potentiaal *(30 punten)*

We beschouwen een gas van N identieke spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes (fermionen) opgesloten in een anisotrope harmonische potentiaal waarin de energieën van de ééndeeltjestoestanden gegeven worden door $\varepsilon = \hbar\omega(2n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$ waarin $0 \leq n_\alpha \leq \infty$ niet-negatieve gehele getallen zijn.

a) Bereken de toestandsdichtheid $D(\varepsilon)$. U moet vinden dat deze evenredig is met ε^2.

b) Leid een uitdrukking af voor de Fermi-energie ε_F en de gemiddelde energie per deeltje bij $\tau = 0$, druk het antwoord uit in ε_F.

c) Leg uit hoe de chemische potentiaal μ van dit systeem van de temperatuur afhangt in de gebieden $\tau \ll \varepsilon_F$ en $\tau \gg \varepsilon_F$.

Formuleblad Thermische Fysica

Ideaal gas: $PV = NkT$, Energie $U = \frac{f}{2}NkT$, f aantal vrijheidsgraden.

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K, $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$, $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js, $c = 2.99 \cdot 10^{8}$ m/s

Fundamentele temperatuur $\tau = k_B T$; Fundamentele entropie $\sigma = S/k_B$

Eerste hoofdwet thermodynamica: $\Delta U = Q + W$

Adiabatische processen: $PV^{\gamma} = \text{constant}, \gamma = \frac{5}{3}$

Soortelijke warmte: $C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

Thermodynamische identiteit: $dU = \tau d\sigma - PdV + \mu dN$

Entropie: $\sigma = \ln \Omega(U, N, V)$

Stirling benadering: $\ln N! = N \ln N - N$

Thermische evenwicht: definitie temperatuur: $\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_{V,N}$

Mechanisch evenwicht: definitie druk: $P = \tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_{U,N}$

Chemisch evenwicht: definitie chemische potentiaal: $\mu = -\tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial N}\right)_{U,V}$

Gemiddelde waarde: $< x > \ = \sum_s x(s)p(s)$

Toestandssom: $Z = \sum_s \exp\left(\frac{-E_s}{\tau}\right)$

Boltzmann bezettingskans: $p(s) = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-E_s}{\tau}\right)$

Gemiddelde energie: $U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}$

Vrije energie: $F = U - \tau\sigma = -\tau \ln Z$

$\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N}, \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}, \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}$

Ideaal gas: $\mu = -\tau \ln\left(\frac{Z_{\text{int}}}{n v_Q}\right)$; kwantumvolume $v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m \tau}}\right)^3$, dichtheid n.

Stefan-Boltzmann: $\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3}\tau^4$

Planck stralingswet: $u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/\tau) - 1}$.

Gibbs som $Z_g r = \sum_s \exp[(\mu N_s - E_s)/\tau]$, som over alle toestanden, inclusief alle waarden voor N_s.

Gibbs bezettingskans: $p(s) = \exp[(\mu N_s - E_s)/\tau]/Z_{gr}$

Gemiddeld aantal deeltjes in een toestand: $< N >= \tau \frac{\partial \ln Z_{gr}}{\partial \mu}$

Distributiefuncties: $n_{FD,BE} = \frac{1}{\exp((\varepsilon - \mu)/\tau) \pm 1}$