DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-355B WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR A.F.M. ARTS.

Uitwerking[1] Thermische fysica 2 (NS-355b) 10 november 2005

Opgave 1: Begrippen en inzicht *(30 punten)*

a) In een geïsoleerd systeem in thermisch evenwicht, zijn alle bereikbare microtoestanden even waarschijnlijk.

b)
1. De tijdsomgekeerde van een mogelijke evolutie is ook een oplossing van de bewegingsvergelijkingen (umkehreinwand).
2. Na verloop van tijd zal het systeem willekeurig dicht bij de begintoestand terugkeren (wiederkehreinwand, stelling van Poincaré).

c)
1. Geen warmtetransport, $\tau_1 = \tau_2$.
2. Mechanisch evenwicht, $P_1 = P_2$.
3. Geen deeltjestransport, $\mu_1 = \mu_2$.

d) De figuur is een demonstratie van het equipartitietheorema, elke vrijheidsgraad van het molecuul levert bij hoge temperaturen een bijdrage $\frac{1}{2}k_BT$ aan de energie en dus $\frac{1}{2}k_B$ aan de warmtecapaciteit. Maximaal zijn er 7 vrijheidsgraden, 3 translatie, 2 vibratie en 2 rotatie. Bij lagere temperaturen vriezen de vibraties en rotaties uit.

e) De factor $N!$ is correct indien de kans dat een toestand door meer dan een deeltje bezet wordt verwaarloosbaar is.

f) Bij het uitdijen van het heelal blijven de bezettingen van de fotontoestanden ongewijzigd (constante entropie), maar de energieën ($\hbar\omega$) dalen (roodverschuiving). Omdat het Planckse spectrum een unieke functie is van de grootheid $x = \frac{\hbar\omega}{\tau}$ komt dit overeen met een lagere temperatuur.

Opgave 2: Ketting aan plafond *(25 punten)*

a) Voor elk afzonderlijk schakel geldt dat er twee toestanden zijn met energiewaarden 0 (schakel omlaag) en $2mga$ (schakel omhoog). De toestandssom voor N schakels is:

$$Z_N = (1 + e^{-\frac{2mga}{\tau}})^N \tag{1}$$

b) De energie wordt gegeven door $U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \tau}$. Als de ketting volledig uitgerekt is ($l = Na$), is de energie gelijk aan nul. Bij eindige temperatuur kunnen we de energie ook schrijven als $U = mg(Na - l)$, waarin l de afstand is tot het plafond. Uitwerken:

$$l = Na\frac{1 - e^{-\frac{2mga}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{2mga}{\tau}}} \tag{2}$$

(alternatief: $l = a\times$(aantal segmenten omlaag gericht - aantal segmenten omhoog gericht). De kans dat een segment omhoog gericht is, is gelijk aan $\frac{e^{-\frac{2mga}{\tau}}}{Z}$).

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

c) Als $\frac{mga}{\tau} \ll 1$ dan kunnen we de e-machten ontwikkelen in een Taylorreeks:

$$e^{-\frac{2mga}{\tau}} = 1 - \frac{2mga}{\tau} \tag{3}$$

Resultaat: $l = \frac{Na^2mg}{\tau}$, Hooke: $F = mg = kl$, dus $k = \frac{\tau}{Na^2}$.

Opgave 3: Exotische deeltjes *(15 punten)*

Bepaal eerst de Gibbs-som. Er zijn drie mogelijke toestanden $N = 0$, $\epsilon = 0$; $N = 1$, $\epsilon = \varepsilon$; $N = 2$, $\epsilon = 2\varepsilon$. $Z_{gr} = 1 + e^{\frac{\mu-\epsilon}{\tau}} + e^{\frac{2\mu-2\epsilon}{\tau}}$. De gemiddelde bezetting van de toestand kan op twee manieren worden uitgerekend, via het formuleblad, $< N >= \tau\frac{\partial \ln Z_g r}{\partial\mu}$, of uit $< N >= 0 \times \frac{1}{Z_g r} + 1 \times \frac{e^{\frac{\mu-\epsilon}{\tau}}}{Z_g r} + 2 \times \frac{e^{\frac{2\mu-2\epsilon}{\tau}}}{Z_g r}$.

Opgave 4: Fermionen in een anisotrope potentiaal *(30 punten)*

a) Aantal toestanden met energie $\leq \epsilon$ is gelijk aan inhoud van piramide met zijden $(\frac{\epsilon}{2\hbar\omega}, \frac{\epsilon}{2\hbar\omega}, \frac{\epsilon}{2\hbar\omega})$: $N = \frac{\epsilon^3}{12\hbar^3\omega^3}$. Voor de toestandsdichtheid vinden we $D(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{4\hbar^3\omega^3}$.

b) Fermi-energie (let op factor 2 voor de spin) volgt uit

$$\frac{\epsilon_F^3}{12\hbar^3\omega^3} = \frac{N}{2} \tag{4}$$

Resultaat $\epsilon_F = \hbar\omega(6N)^{\frac{1}{3}}$
Energie volgt uit:

$$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon \tag{5}$$

Resultaat per deeltje $\frac{E}{N} = \frac{3}{4}\epsilon_F$

c) Voor elke temperatuur moet gelden dat het totaal aantal deeltjes gelijk blijft. Dus

$$\frac{N}{2} = \int_0^{\infty} f_{BE}(\epsilon)D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon \tag{6}$$

Hierin is f_{BE} de Bose-Einsteindistributie. Voor $\tau \ll \epsilon_F$ gaan alleen deeltjes in de buurt van de Fermi-energie naar een hogere toestand. Omdat de toestandsdichtheid toeneemt met toenemende energie kan de integraal alleen constant blijven als de chemische potentiaal, voorkomend in de distributie, afneemt. Als $\tau \gg \epsilon_F$ hebben we te maken met een klassiek ideaal gas. De chemische potentiaal wordt dan gelijk aan de potentiaal van het ideale gas (formuleblad).