Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-355b werd in 2006/2007 gegeven door prof. dr. ir. H.T.C. Stoof.

# Thermische Fysica 2 (NS-355b)
# 1 februari 2007

N.B. Het boek *Thermal Physics* mag bij dit tentamen gebruikt worden.

## Opgave 1: Keten van atomen *(40 punten)*

We beschouwen een keten van $N$ onafhankelijke atomen. Ieder atoom kan zich in twee toestanden 1 en 2 bevinden, met respectievelijk energie $\epsilon_1$ en $\epsilon_2$. Als er $n_1$ atomen in toestand 1 en $n_2$ atomen in toestand 2 bevinden dan geldt dus dat $N = n_1 + n_2$ en wordt de totale energie gegeven door $E = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2$.

a) Bepaal de kanonieke toestandssom bij temperatuur $T$. Laat zien dat de vrije energie gegeven wordt door
$$F = -Nk_BT\ln\left(e^{-\frac{\epsilon_1}{k_BT}} + e^{-\frac{\epsilon_2}{k_BT}}\right). \tag{1}$$

b) Bereken de gemiddelde energie $U$ van de keten.

c) Laat ook zien dat de entropie $S$ gelijk is aan
$$S = Nk_B\left[\frac{\Delta}{k_BT}\frac{1}{e^{\frac{\Delta}{k_BT}}+1} + \ln\left(1 + e^{-\frac{\Delta}{k_BT}}\right)\right], \tag{2}$$
met $\Delta = \epsilon_2 - \epsilon_1$.

d) Bereken de entropie $S$ in de limieten $T \to 0$ en $T \to \infty$. Neem hierbij aan dat $\Delta > 0$. Geef een korte fysische interpretatie van het resultaat.

## Opgave 2: Ideaal Fermi gas in één dimensie *(60 punten)*

Beschouw een ideaal Fermi gas van $N$ deeltjes met spin $\frac{1}{2}$ en massa $m$, die zich bevinden in een ééndimensionale doos met lengte $L$.

a) Laat zien dat de toestandsdichtheid in dit geval gegeven wordt door
$$\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} = \frac{N}{2\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon_F}{\epsilon}}, \tag{3}$$
met $\epsilon_F$ de Fermi energie.

b) Beargumenteer dat in het geval dat de temperatuur gelijk is aan $T = 0$, de chemische potentiaal van dit gas gelijk is aan de Fermi energie; d.w.z. $\mu = \epsilon_F$.

We veronderstellen van nu af aan dat de temperatuur van het Fermi gas gelijk is aan $T = 0$ en verdelen de ééndimensionale doos in twee even grote helften. Bovendien leggen we in deelvolume I een homogeen magneetveld $B$ aan, terwijl er in deelvolume II geen magneetveld aanwezig is. De energie ten gevolge van het magneetveldvandeeltje $i$ is $-s_i\mu_0B$, met $s_i = \pm\frac{1}{2}$ en $i = 1, \ldots, N$.

c) Bepaal de chemische potentiaal $\mu$ van het gas als functie van het aantal deeltjes $N_{\mathrm{II}}$ dat zich in deelvolume II bevindt.

d) Laat zien dat de toestandsdichtheid van de deeltjes in deelvolume I met $s = +\frac{1}{2}$ gegeven wordt door $\mathcal{D}(\epsilon) = \left(\frac{L}{4\pi\hbar}\right)\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}$.

e) Het aantal deeltjes in deelvolume I met $s = +\frac{1}{2}$ geven we aan met $N_{\mathrm{I}}^{(+)}$ en dat met $s = -\frac{1}{2}$ met $N_{\mathrm{I}}^{(-)}$. Laat met behulp van de conditie van diffusief evenwicht zien dat

$$\frac{N_{\mathrm{I}}^{(+)}}{N_{\mathrm{I}}^{(-)}} = \left\{1 + \frac{\mu_0 B}{2\mu}\right\} \tag{4}$$

als $\mu_0 B \ll \mu$.

f) Bepaal nu in deze limiet, d.w.z. met verwaarlozing van termen evenredig met $\left(\frac{\mu_0 B}{\mu}\right)^2$, eveneens het aantal deeltjes $N_{\mathrm{I}}$ in deelvolume I en de magnetisatie $M = \langle\sum_i \mu_0 s_i\rangle$, beide als functie van het totaal aantal deeltjes $N$ en het magneetveld $B$.