Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college TF2b werd in 2001/2002 gegeven door dr. ir. A.F.M. Arts.

Uitwerking[1] Thermische Fysica 2b (TF2b)
21 december 2001

Opgave 1: Statistiek van identieke deeltjes *(30 punten)*

a) Fermionen: toestanden $(0,\epsilon),(0,2\epsilon),(0,2\epsilon),(\epsilon,2\epsilon),(\epsilon,2\epsilon),(2\epsilon,2\epsilon)$; $Z_F = \exp(\frac{-\epsilon}{\tau})+2\exp(\frac{-2\epsilon}{\tau})+2\exp(\frac{-3\epsilon}{\tau})+\exp(\frac{-4\epsilon}{\tau})$

Bosonen: extra toestanden $(0,0),(\epsilon,\epsilon),(2\epsilon,2\epsilon),(2\epsilon,2\epsilon)$; $Z_B = 1+\exp(\frac{-\epsilon}{\tau})+3\exp(\frac{-2\epsilon}{\tau})+2\exp(\frac{-3\epsilon}{\tau})+3\exp(\frac{-4\epsilon}{\tau})$

Onderscheidbare deeltjes: $Z = Z_1^2 = (1+\exp(\frac{-\epsilon}{\tau})+2\exp(\frac{-2\epsilon}{\tau})^2$.

b) Identieke deeltjes die vastgeprikt zitten op bijvoorbeeld een rooster. Er zijn geen onderlinge wisselingen mogelijk.

c) Kwantumeffecten gaan een rol spelen als de dichtheid van een gas van de grootte-orde wordt van de kwantumdichtheid. De golffuncties van de deeltjes gaan overlappen. $\frac{V}{N} \approx v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m\tau}}\right)^3$, dus $\tau \approx \frac{h^2}{2\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Opgave 2: Roostergassen *(35 punten)*

a) Ga uit van één plaats, er zijn dan twee toestanden $(N=0,E=0)$ en $(N=1,E=-\epsilon)$. $Z_{gr}(1) = 1+\exp(\frac{\mu+\epsilon}{\tau})$. Voor het hele rooster $Z_{gr} = Z_{gr}(1)^M$. Kans op bezetting van een plaats $p_s = \frac{\exp(\frac{\mu+\epsilon}{\tau})}{Z_{gr}(1)}$; $N = Mp_s$. (Ook via $N = \tau\partial\ln\frac{Z_{gr}}{\partial\mu}$).

b) Eén plaats: $Z_{gr}(1) = 1+\exp(\frac{\mu+\epsilon}{\tau})\sum_n \exp\left(\frac{-n\hbar\omega-\frac{1}{2}}{\tau}\right)$.

c) Deeltjes worden verondersteld gelokaliseerd te zijn. Geen kwantumeffecten door overlap van golffuncties (In deze opgave wordt expliciet gezegd dat per plaats zich maar één deeltje kan bevinden, het heeft dan weinig zin om onderscheid te maken tussen bosonen en fermionen).

Opgave 3: Witte dwergen *(35 punten)*

a) $\epsilon = pc = \frac{\pi\hbar c}{R}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$; Aantal toestanden met energie $\leq \epsilon : N(\epsilon) = 2\times\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi n^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{c\pi\hbar}\right)^3\epsilon^3$; $D(\epsilon) = \pi\left(\frac{R}{c\pi\hbar}\right)^3\epsilon^2$

b) $\epsilon_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{c\hbar\pi}{R}$

c) $U = \int_0^{\epsilon_F}\epsilon D(\epsilon)d\epsilon = \frac{3}{4}N\epsilon_F$

d) Aangezien de temperatuur van de ster veel kleiner is dan de Fermi-energie, is de breedte van de verdeling van elektronen met een energie groter dan ϵ_F van de orde van τ, dit volgt uit de Fermi-Dirac distributie. Het aantal deeltjes in een "aangeslagen toestand" is dan gelijk aan $\tau D(\epsilon_F)$. Invullen van getallen resulteert in $\approx 0.01\%$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`