

## Thermische fysica 2 (NS-355B)

### 29 januari 2009

#### Opgave 1. Fluctuaties (20 pt)

- a) Uitgaande van de partitiesom  $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$ , laat zien dat de gemiddelde energie  $U = \langle E \rangle$  geschreven kan worden als

$$U = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}.$$

- b) Laat zien dat de fluctuaties in  $E$  gerelateerd zijn aan de soortelijke warmte  $C = \frac{\partial U}{\partial T}$  via

$$C = k_B \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2).$$

- c) Beschouw het Isingmodel met de Hamiltoniaan

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

Hierin is  $J$  de interactiesterkte tussen naburige spin, en  $h$  de sterkte van een extern (magnetisch) veld. Zoals gebruikelijk loopt de eerste sommatie over alle paren van naburige site; de tweede sommatie loopt over alle sites

Laat zien dat de verwachtingswaarde van de magnetisatie  $M = \sum_i \sigma_i$  geschreven kan worden als

$$\langle M \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial h}.$$

- d) Laat zien dat de fluctuaties in  $M$  gerelateerd zijn aan de magnetische susceptibiliteit  $\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h}$  via

$$\chi = \beta (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2).$$

#### Opgave 2. Polymeren / Random walks (20 pt)

Beschouw een “random walk” op een cubisch rooster, met de beperking dat twee opeenvolgende stappen nooit exact tegengesteld zijn, maar ten opzichte van elkaar een hoek maken van 0 of 90 graden. In andere woorden, benader een polymeer met een random walk op een cubisch rooster, met de eigenschap dat monomeren  $i$  en  $i + 2$  niet op dezelfde rooster site mogen liggen. Bereken de gemiddelde kwadratische eind-eind lengte van de polymeer, gegeven door  $R_{ee}^2 = \langle |\vec{x}_N - \vec{x}_0|^2 \rangle$ . Hierin mag je gebruiken dat het aantal stappen  $N$  voldoet aan  $N \gg 1$ .

#### Opgave 3. “mean field” benadering (20 pt)

Het Potts model is een simpele generalizatie van het Ising model naar een willekeurig aantal toestanden per rooster site. Hier kiezen we vier toestanden. Elke site  $j$  van het rooster bevindt zich nu in één van vier toestanden, bijvoorbeeld  $s_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . De energie is lager als twee naburige sites zich in dezelfde toestand bevinden; de Hamiltoniaan is gegeven door

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(s_i, s_j)$$

waarin  $J > 0$ ; de sommatie loopt over alle paren van naburige sites. Elke site heeft  $z$  burens. Analoog aan de magnetizatie in het Ising model definiëren we nu vier grootheden  $m_k = \langle \delta(s_i, k) \rangle$ , waarin  $k = 1, 2, 3$  en  $4$ .

Het is bekend dat dit model een overgang heeft van een fase waarin alle vier spintoestanden ongeveer even vaak voorkomen, naar een fase waarin één spintoestand domineert. We nemen dus aan dat  $m_2 = m_3 = m_4 = m$ .

- Geef een mean-field uitdrukking voor de energie  $\langle E \rangle$  in termen van  $m$ .
- Geef een mean-field uitdrukking voor de entropie  $S$  in termen van  $m$ .
- Bepaal een vergelijking in  $m$ , resulterend uit de voorwaarde dat  $\frac{\partial F(m)}{\partial m} = 0$ .
- Helaas is het moeilijk uit deze vergelijking alle oplossingen van  $m$  als functie van de temperatuur te bepalen. Er is echter één makkelijke oplossing voor  $m$ , welke is dat?

#### Opgave 4. Bose-Einstein condensatie in een atomair gas met een Feshbach resonantie (30 pt)

We beschouwen een atomair gas van identieke bosonische atomen met massa  $m$  nabij een Feshbach resonantie. Dat houdt in dat ieder willekeurig paar van atomen kan binden tot een molecuul met energie  $\delta$ . Vervolgens kan zo'n molecuul weer dissociëren tot een ongebonden paar van atomen. Er ontstaat dus thermisch evenwicht tussen een gas van atomen en een gas van moleculen. Bij voldoende lage temperatuur kunnen, afhankelijk van de waarde van  $\delta$ , zowel de atomen als de moleculen Bose-Einstein condenseren. Dit definieert een kritische temperatuur  $T_c(\delta)$ , gedefinieerd als de hoogste temperatuur waarbij ofwel de moleculen, ofwel de atomen, of beide, Bose-Einstein condenseren. We beschouwen het systeem in drie dimensies in een kubus (met periodieke randvoorwaarden) met volume  $V = L^3$ . Dit houdt in dat de energie van een atoom met golfvector  $\mathbf{k}$  gelijk is aan  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m)$ , waarbij  $\hbar$  Planck's constante gedeeld door  $2\pi$ .

- We beschouwen het systeem bij een vaste *atomaire* dichtheid  $n$ . Geef de kritische temperatuur  $T_c(\delta)$  voor  $\delta \ll 0$  en  $\delta \gg 0$ , en laat hieruit zien dat  $T_c(-\delta)/T_c(\delta) = 1/2^{5/3}$  voor  $\delta \gg 0$ . [Hint: U kunt als gegeven aannemen dat een gas van identieke bosonen met massa  $m_0$  in een kubus bij dichtheid  $n_0$  als kritische temperatuur  $T_0$  voor Bose-Einstein condensatie heeft:  $T_0 = 3.31 \hbar^2 n_0^{2/3} / (m_0 k_B)$ , waarbij  $k_B$  Boltzmann's constante.]
- De chemische potentiaal van de atomen duiden we aan met  $\mu$ . Beargumenteer dat de chemische potentiaal van de moleculen gelijk is aan  $2\mu$ . [Hint: in het algemeen geldt dat de chemische potentiaal evenredig is met de afgeleide van de entropie naar het aantal deeltjes.]
- De conditie voor Bose-Einstein condensatie is dat de chemische potentiaal gelijk is aan het laagste één-deeltjes energie niveau. Leidt hieruit af dat voor temperaturen  $T = T_c(\delta)$  geldt dat  $\mu = \delta/2$  voor  $\delta \leq 0$  en dat  $\mu = 0$  voor  $\delta \geq 0$ .
- Geef de vergelijking die de kritische temperatuur  $T_c(\delta)$  bepaalt. N.B.: beschouw de situaties  $\delta \leq 0$  en  $\delta \geq 0$  apart. U hoeft de integraal over  $\mathbf{k}$  niet uit te voeren. Hint: U mag als gegeven beschouwen dat de dichtheid  $n_0$  van een Bose gas van bosonen met massa  $m_0$  en chemische potentiaal  $\mu_0$  in een kubus, voor temperaturen  $T$  groter dan of gelijk aan de temperatuur voor Bose-Einstein condensatie, gegeven wordt door

$$n_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{1}{k_B T}(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu_0)} - 1}$$

- Schets  $T_c(\delta)$  als een functie van  $\delta$ .