

Hertentamen Quantum Mechanics 2 (NS356B) 16 maart 2010

Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.

Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

Alleen het boek *Modern Quantum Mechanics* mag bij het tentamen gebruikt worden.

Opgave 1: Spin-1/2 in een magneetveld

Beschouw een (electrisch neutraal) deeltje met spin 1/2 in een eventueel tijdsafhankelijk magneetveld $\mathbf{B}(t)$. We beschouwen in het vervolg alleen de spin vrijheidsgraad van het deeltje en verwaarlozen verder de ruimtelijke beweging van het deeltje. De Hamiltoniaan van het deeltje wordt dan

$$\hat{H}(t) = -\frac{\mu}{\hbar} \mathbf{B}t \cdot \hat{\mathbf{S}},$$

met $\mu/2$ het magnetisch moment van het deeltje en $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ de vector van spinoperatoren.

We beschouwen allereerst een tijdsafhankelijk magneetveld in het $x-z$ vlak van de vorm $\mathbf{B} = B(\sin(\theta), 0, \cos(\theta))$ met de grootte van het magneetveld $B > 0$. De meest algemene toestand van het systeem is nu te schrijven als $|\Psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t)|m\rangle$ met $|m\rangle$ de eigentoestanden van \hat{S}_z met eigenwaarde $m\hbar$ en $m = -1/2$ en $+1/2$, respectievelijk.

- Op het tijdstip $t = 0$ bevindt het deeltje zich in de toestand $|+1/2\rangle$. Bepaal de kans $P_z(t)$ om het deeltje aan te treffen in de toestand $|-1/2\rangle$ op een later tijdstip $t > 0$. Schets uw resultaat voor een aantal waarden van de hoek θ
- Bepaal ook de kans $P_x(t)$ om het deeltje aan te treffen in de eigentoestand van \hat{S}_x met eigenwaarde $-\hbar/2$. Schets uw resultaat voor een aantal waarden van de hoek θ .
- Bepaal de bewegingsvergelijking voor de gemiddelde spin vector $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle(t)$ en los deze op voor $\theta = \pi/2$. Schets uw resultaat.

We beschouwen nu een tijdsafhankelijk magneetveld in het $x-z$ vlak van de vorm $\mathbf{B}(t) = B(\sin(\theta(t)), 0, \cos(\theta(t)))$ met $B > 0$ constant. We nemen bovendien nu $\theta(t) = \theta' t$, waarbij de tijdsafgeleide van de hoek van het magneetveld θ' zo klein is dat aangenomen mag worden dat het systeem nooit een overgang van één instantane eigentoestand, d.w.z. een eigentoestand van $\hat{H}(t)$ corresponderend met een eigenvector voor het instantane magneetveld $\mathbf{B}(t)$, naar een andere instantane eigentoestand maakt gedurende de tijdsevolutie.

- Bepaal nu opnieuw $P_z(t)$ en $P_x(t)$.
- Bepaal ook opnieuw de gemiddelde spin vector $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle(t)$

Opgave 2: Lithium-atoom

We beschouwen de grondtoestand van het Li-atoom met behulp van variatierekening. Het Li-atoom bestaat uit een kern met lading $+3e$ en drie electronen met lading $-e$, waarbij e de elementaire lading is. De kern kan in het vervolg als een oneindig zware puntlading gezien worden. Bovendien brengen we alleen de Coulomb interactie tussen de kern en de drie electronen en tussen de electronen onderling in rekening. Electronen zijn fermionen met spin 1/2 en de massa van de electronen geven we aan met m .

- a) Geef de Hamiltoniaan voor dit probleem.
- b) Geef ook de Hamiltoniaan als we slechts te maken zouden hebben met één electron, dat wil zeggen het Li^{2+} -ion. Geef vervolgens de exacte golffunctie voor de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand met impulsmoment $l = 0$ van dit ion en bepaal hiermee de energie van deze twee toestanden.
- c) Construeer door gebruik te maken van uw resultaat voor deze één electrongolffuncties een variationale golffunctie voor de grondtoestand van het Li-atoom. Geef daarmee een uitdrukking voor de grondtoestandsenergie. U hoeft de integraal in uw uiteindelijke resultaat niet expliciet uit te werken.
- d) Wat is de totale spin van de electronen in de grondtoestand van het Li-atoom? Beargumenteer uw antwoord.

Er komen in de natuur twee isotopen van lithium voor, namelijk ${}^6\text{Li}$ en ${}^7\text{Li}$. In het eerste geval heeft de kern een spin 1, en in het tweede geval een spin $3/2$

- f) Geef de mogelijkheden voor totale spin van de grondtoestand van zowel het ${}^6\text{Li}$ -atoom als het ${}^7\text{Li}$ -atoom. Geef in beide gevallen ook aan of we te maken hebben met een bosonisch of fermionisch atoom.