Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit Utrecht

TENTAMEN QUANTUM MECHANICA 2

Dinsdag 2 februari 2010, 15.00-18.00 uur

1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.

2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

3) Alleen het boek *Modern Quantum Mechanics* mag bij het tentamen gebruikt worden.

Opgave 1: Spin-1 in een magneetveld

Beschouw een (electrisch neutraal) deeltje met spin 1 in een eventueel tijdsafhankelijk magneetveld $\mathbf{B}(t)$. We beschouwen in het vervolg alleen de spin vrijheidsgraad van het deeltje en verwaarlozen verder de ruimtelijke beweging van het deeltje. De Hamiltoniaan van het deeltje wordt dan

$$\hat{H}(t) = -\frac{\mu}{\hbar}\mathbf{B}(t)\cdot\hat{\mathbf{S}}, \tag{1}$$

met $\mu/2$ het magnetisch moment van het deeltje en $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ de vector van spinoperatoren.

We beschouwen allereerst een tijdsonafhankelijk magneetveld in het x-z vlak van de vorm $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ met $B_x > 0$. De meest algemene toestand van het systeem is nu te schrijven als $|\Psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t)|m\rangle$ met $|m\rangle$ de eigentoestanden van $\hat{S}_z$ met eigenwaarde $m\hbar$ en $m = -1, 0, +1$, respectievelijk.

a) Laat zien dat de Schrödinger vergelijking

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle,$$

equivalent is aan de matrix vergelijking

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_{+1}(t) \\ c_0(t) \\ c_{-1}(t) \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} B_z & B_x/\sqrt{2} & 0 \\ B_x/\sqrt{2} & 0 & B_x/\sqrt{2} \\ 0 & B_x/\sqrt{2} & -B_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{+1}(t) \\ c_0(t) \\ c_{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Bepaal de energieniveau's $E_\sigma(\mathbf{B})$ van het systeem door oplossingen van vergelijking (2) van de vorm

$$\begin{pmatrix} c_{+1}(t) \\ c_0(t) \\ c_{-1}(t) \end{pmatrix} = e^{-iE_\sigma t/\hbar}\begin{pmatrix} c_{\sigma,+1} \\ c_{\sigma,0} \\ c_{\sigma,-1} \end{pmatrix}$$

te zoeken. Maak een schets van deze energieniveau's als functie van $-\infty < B_z < \infty$ bij een vaste $B_x > 0$. Doe dit laatste ook als het u niet gelukt is de energieniveau's E_σ analytisch te bepalen.

c) Geef de eigenvectoren $\mathbf{c}_\sigma(\mathbf{B}) = (c_{\sigma,+1}(\mathbf{B}), c_{\sigma,0}(\mathbf{B}), c_{\sigma,-1}(\mathbf{B}))$ als functie van B_z bij een vaste $B_x > 0$. Als het u niet gelukt is de energieniveau's E_σ analytisch te bepalen, geef dan de eigenvectoren als functie van E_σ. Becommentarieer in het bijzonder uw resultaat voor $B_z \to \pm\infty$ en voor $B_z = 0$.

d) Bepaal voor de eigentoestanden die u gevonden hebt in onderdeel d) de gemiddelde spin vector $\langle\hat{\mathbf{S}}\rangle$. Becommentarieer wederom in het bijzonder uw resultaat voor $B_z \to \pm\infty$ en voor $B_z = 0$.

We beschouwen nu een tijdsafhankelijk magneetveld in het x-z vlak van de vorm $\mathbf{B}(t) = (B_x, 0, B_z(t))$ met $B_x > 0$ constant. We nemen bovendien nu $B_z(t) = B_z' t$, waarbij de tijdsafgeleide van het magneetveld B_z' zo klein is dat aangenomen mag worden dat het systeem nooit een overgang van één instantane eigentoestand, d.w.z. een eigentoestand van $\hat{H}(t)$ corresponderend met een eigenvector $\mathbf{c}_\sigma(\mathbf{B}(t))$ voor het instantane magneetveld $\mathbf{B}(t)$, naar een andere instantane eigentoestand maakt gedurende de tijdsevolutie.

e) Als het systeem voor $t \to -\infty$ in de toestand $|+1\rangle$ zit, wat is dan de kans dat het systeem voor $t \to \infty$ in de toestand $|-1\rangle$ zit? Beargumenteer uw antwoord en geef de conditie waaraan B_z' moet voldoen zodat dit antwoord inderdaad correct is.

f) Geef ook de golffunctie $|\Psi(t)\rangle$ voor dit geval.

Opgave 2: Lithium$^+$-atoom

We beschouwen de grondtoestand van het Li^+-atoom met behulp van variatierekening. Het Li^+-atoom bestaat uit een kern met lading $+3e$ en twee electronen met lading $-e$, waarbij e de elementaire lading is. De kern kan in het vervolg als een oneindig zware puntlading gezien worden. Bovendien brengen we alleen de Coulomb interactie tussen de kern en beide electronen en tussen de electronen onderling in rekening. Electronen zijn fermionen met spin $1/2$ en de massa van een electronen geven we aan met m.

a) Geef de Hamiltoniaan voor dit probleem.

b) Geef ook de Hamiltoniaan als we slechts te maken zouden hebben met één electron, dat wil zeggen het Li^{2+}-atoom. Geef vervolgens een variationele golffunctie voor de grondtoestand van dit atoom en bepaal hiermee een benadering voor de grondtoestandsenergie. Beargumenteer uw keuze voor de variationale golffunctie.

c) Construeer door gebruik te maken van uw resultaat voor deze één electrongolffunctie een variationale golffunctie voor de grondtoestand van het Li^+-atoom. Geef daarmee een uitdrukking voor de grondtoestandsenergie. U hoeft de integraal in uw uiteindelijke resultaat niet expliciet uit te werken.

d) Wat is de totale spin van de electronen in de grondtoestand van het Li^+-atoom? Beargumenteer uw antwoord.

Er komen in de natuur twee isotopen van lithium voor, namelijk ^6Li en ^7Li. In het eerste geval heeft de kern een spin 1, en in het tweede geval een spin $3/2$.

e) Geef de totale spin van de grondtoestand van zowel het $^6Li^+$-atoom als het $^7Li^+$-atoom. Geef in beide gevallen ook aan of we te maken hebben met een bosonisch of fermionisch atoom.