Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit Utrecht

TENTAMEN QUANTUM MECHANICA 2

Donderdag 11 november 2010, 10.00-12.00 uur

1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.

2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

3) Alleen het boek *Modern Quantum Mechanics* en het werkcollegedictaat mogen bij het tentamen gebruikt worden.

Opgave: Harmonische oscillator

Beschouw een deeltje met massa m in een harmonische potentiaal $V(\hat{x}) = m\omega^2\hat{x}^2/2$. In termen van de positieoperator $\hat{x}$ en de impulsoperator $\hat{p}$ wordt de creatieoperator gegeven door

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) . \tag{1}$$

We prepareren het deeltje nu op tijdstip $t = 0$ in de toestand

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}|\alpha\rangle , \tag{2}$$

waarbij de zogenaamde coherente toestand voldoet aan

$$|\alpha\rangle = \exp\left\{\alpha\hat{a}^\dagger\right\}|0\rangle , \tag{3}$$

met α een complex getal en $|0\rangle$ de grondtoestand van het deeltje in de harmonische potentiaal is die voldoet aan $\hat{a}|0\rangle = 0$.

a) Laat zien dat de normering van de coherente toestand voldoet aan

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2} . \tag{4}$$

b) Laat ook zien dat de coherente toestand een eigentoestand van de annihilatieoperator is, dat wil zeggen dat

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle . \tag{5}$$

c) Bereken hiermee de gemiddelde positie $\langle\hat{x}\rangle(0)$ en de gemiddelde impuls $\langle\hat{p}\rangle(0)$ van het deeltje op het tijdstip $t = 0$.

d) We definieren nu ook de spreidingsoperatoren $\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$ en $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle$. Bereken vervolgens $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle(0)$ en $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle(0)$.

e) Beargumenteer waar een zogenaamde minimum-onzekerheids-toestand aan zou moeten voldoen. Voldoet de toestand $|\Psi(0)\rangle$ hieraan?

We beschouwen vervolgens ook de tijdsevolutie van het deeltje.

f) Laat zien dat de oplossing $|\Psi(t)\rangle$ van de tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking ook een coherente toestand is met $\alpha(t) = \alpha e^{i\omega t}$.

g) Bereken hiermee de gemiddelde positie $\langle\hat{x}\rangle(t)$ en de gemiddelde impuls $\langle\hat{p}\rangle(t)$ van het deeltje. Komt uw resultaat overeen met uw verwachtingen op grond van het Ehrenfest theorema? Beargumenteer uw antwoord.

h) Bepaal nu ook $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle(t) \cdot \langle(\Delta\hat{p})^2\rangle(t)$.