INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS
UTRECHT UNIVERSITY

Final Exam Advanced Quantum Mechanics (total 100 points)

Tuesday, January 27, 2015, 13:30-16:30

1. *Write your name and initials on all sheets, on the first sheet also your student ID number.*
2. *Write clearly, unreadable work cannot be corrected.*
3. *Give the motivation, explanation, and calculations leading up to each answer and/or solution.*
4. *Do not spend a large amount of time on finding (small) calculational errors. If you suspect you have made such an error, point it out in words.*
5. *Note the appendix at the end of this exercise!*

We beschouwen een (in eerste instantie) spinloos deeltje met massa m in twee dimensies in een "doos" met oppervlakte $A = L^2$ en zijde L op positie $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$. Dat wil zeggen, het deeltje voelt een potentiaal gegeven door $V(x - R_x, y - R_y)$ met $V(x, y) = 0$ als $0 < x < L$ en $0 < y < L$, terwijl deze potentiaal $V(x, y) \to \infty$ als het deeltje buiten dit gebied komt.

De tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking voor de golffunctie $\chi(x, y)$ van het deeltje is gegeven door

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x - R_x, y - R_y)\right]\chi(x, y) = \epsilon\chi(x, y) ,$$

met ϵ de energie van de toestand waarin het deeltje zich bevindt.

a) *(10 points)* Beschouw de situatie $\mathbf{R} = 0$ en laat zien dat de genormaliseerde grondtoestandsgolffunctie dan gegeven wordt door

$$\chi_0(x, y) = C \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) ,$$

waarbij $C = 2/L$. Geef ook de energie.

b) *(5 points)* Beschouw het geval met $\mathbf{R}$ willekeurig, en laat zien, door invullen in de Schrödinger vergelijking met correct gebruik van de randvoorwaarden, dat de grondtoestand dan gegeven wordt door

$$\chi_{\mathbf{R}}(x, y) = C \sin\left(\frac{\pi(x - R_x)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(y - R_y)}{L}\right) .$$

c) *(10 points)* Het resultaat bij b) resulteert ook uit een translatie van de oplossing $\chi_0(x, y)$ over de vector $\mathbf{R}$. Op het college heeft u geleerd dat onder een translatie over een vector $\mathbf{a}$ een algemene toestand $|\psi\rangle$ overgaat in $e^{-i\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{a}/\hbar}|\psi\rangle$, met $\hat{\mathbf{p}}$ de impuls operator. Pas dit toe, door expliciet te werken met de operator $e^{-i\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{R}/\hbar}$ in de plaatsrepresentatie op $\chi_0(x, y)$, om $\chi_{\mathbf{R}}(x, y)$ te verkrijgen.

d) *(5 points)* Indien $\mathbf{R}$ tijdsafhankelijk is, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, geef dan een schatting voor de bovengrens van $d\mathbf{R}/dt$ beneden welke het deeltje in de grondtoestand blijft.

In deelopgaven e) , f), en g) beschouwen het systeem in een vectorpotentiaal $\mathbf{A}(x,y)$ die de eigenschap heeft dat $\nabla \times \mathbf{A}$ altijd nul is binnen het gebied waar het deeltje zich bevindt (binnen de doos). Hierbij is $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$. We nemen aan dat het deeltje lading q heeft. De Schrödinger vergelijking wordt dan gegeven door

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(x,y)\right)^2 + V(x - R_x, y - R_y)\right]\chi(x,y) = \epsilon\chi(x,y) \; .$$

e) *(10 points)*Laat zien dat

$$\psi_{\mathbf{R}}(x,y) = e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{x}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A}}\chi_{R}(x,y) \; ,$$

een oplossing is van de Schrödinger vergelijking. Hierbij is $\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{x}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{A}$ een lijn-integraal van de vectorpotentiaal langs een willekeurig pad van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{x}$.

f) *(5 points)* Op het college heeft u geleerd dat een ijktransformatie van de vector potentiaal $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Lambda$, met Λ een willekeurige scalaire functie van de positie, gepaard gaat met de verandering (op een algehele fase factor na) $\psi \to e^{iq\Lambda(\mathbf{x})/(\hbar c)}\psi$ van de golffunctie. Laat dit expliciet zien voor de golffunctie van onderdeel e).

g) *(10 points)* Op het college heeft u geleerd dat de kwantummechanische toestand een zogenaamde Berry fase factor kan verkrijgen als het systeem langzaam (adiabatisch) een gesloten pad in een parameterruimte doorloopt. Deze Berry fase wordt gegeven door

$$\gamma_B = i\int_0^T dt \sum_{\mu=1}^{N} \langle\psi_{\mathbf{R}}|\frac{\partial}{\partial R_\mu}\psi_{\mathbf{R}}\rangle\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \; ,$$

waarbij $|\psi_{\mathbf{R}}\rangle$ de grondtoestand is voor de waarden $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \cdots, R_N)$ van de parameters, waarbij er N parameters zijn. Beschouw nu de positie van de doos als de adiabatische langzaam varierende parameters, d.w.z., we stellen ons voor dat we de positie van de doos met het deeltje langzaam veranderen en uiteindelijke weer op dezelfde plek terugkomen. Laat zien dat dan $\gamma_B = 2\pi\Phi/\Phi_0$, waarbij Φ de magnetische flux door de oppervlakte die het pad omsluit en $\Phi_0 = 2\pi\hbar$ het fluxquantum.

In het vervolg van deze opgave laten we de vectorpotentiaal buiten beschouwing, en nemen we aan dat het deeltje spin $S = 1/2$ heeft. Voorts nemen we aan dat het deeltje zich bevindt in een radieel gericht Zeeman magneetveld, d.w.z., dat het gedeelte van de hamiltoniaan dat het spingedeelte van de grondtoestand bepaalt gegeven wordt door:

$$\hat{H}_Z = -\frac{\Delta}{\hbar}\hat{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{\Omega} \; ,$$

waarbij de energie $\Delta > 0$, $\hat{\mathbf{S}}$ de spinoperator, en de eenheidsvector $\boldsymbol{\Omega}$ gegeven wordt door $\boldsymbol{\Omega} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, met θ de hoek tussen $\boldsymbol{\Omega}$ en de x-as.

h) *(10 points)* Laat zien dat de genormaliseerde grondtoestand van $\hat{H}_Z$ energie $-\Delta/2$ heeft en (op een fasefactor na) gegeven wordt door

$$|\psi_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + e^{i\theta}|\downarrow\rangle\right) \; ,$$

waarbij $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ de eigenstoestanden van $\hat{S}_z$ zijn. NB: alhoewel niet noodzakelijk voor dit onderdeel kan het met het oog op het volgende onderdeel (i) handig zijn om ook de aangeslagen toestand en de energie daarvan alvast te berekenen.