INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS
UTRECHT UNIVERSITY

Midterm Exam Advanced Quantum Mechanics (total 100 points)

Tuesday, 9 December, 2014, 13:15-15:15

1. *Use a separate sheet for every exercise.*
2. *Write your name and initials on all sheets, on the first sheet also your student ID number.*
3. *Write clearly, unreadable work cannot be corrected.*
4. *Give the motivation, explanation, and calculations leading up to each answer and/or solution.*
5. *Do not spend a large amount of time on finding (small) calculational errors. If you suspect you have made such an error, point it out in words.*

Instantane verandering van een harmonische potentiaal — We beschouwen een 1-dimensionale harmonische oscillator met frequentie ω en massa m die op tijdstip $t = 0$ instantaan verschoven wordt over een afstand λx_0, waarbij $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ de harmonische-oscillator lengte en met λ een klein dimensieloos getal. Dat wil zeggen, de hamiltoniaan wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} H &= H_1 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \text{voor } t < 0; \\ H &= H_2 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x} - \lambda x_0)^2, \text{voor } t > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Verder is gegeven dat het deeltje zich voor $t = 0$ bevindt in de stationaire toestand die hoort bij het grondniveau van H_1:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|\psi_0\rangle \ ,$$

waarbij $|\psi_0\rangle$ de grondtoestand van de hamiltoniaan H_1. Meer algemeen voldoen de eigentoestanden aan $H_1|\psi_k\rangle = \hbar\omega(k + 1/2)|\psi_k\rangle$.

a) *(30 points)* Pas voor $t > 0$ tijdsafhankelijke storingsrekening toe om te laten zien dat tot op eerste orde in λ de toestand voor $t > 0$ gegeven wordt door:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|\psi_0\rangle + \lambda x_0\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\left(e^{i\omega t} - 1\right)|\psi_1\rangle \ .$$

✓ e-t fout

Laat hiervoor ook zien dat (dit heeft u nodig in uitwerking van bovenstaand):

$$\langle\psi_k|\hat{x}|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{k,1} \ .$$

D

b) *(20 points)* Beredeneer dat de verwachtingswaarde van de energie voor $t > 0$ behouden is, d.w.z. $\langle\Psi(t)|H_2|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(0)|H_2|\Psi(0)\rangle$, en bereken deze verwachtingswaarde exact. Laat zien dat deze verwachtingswaarde groter is dan $\hbar\omega/2$, het grondniveau van H_2.

Het probleem van de instantane verschuiving kan ook exact worden opgelost door de toestand voor $t > 0$ te ontwikkelen naar eigentoestanden van de hamiltoniaan H_2 die voldoen aan: $H_2|\phi_k\rangle = \hbar\omega(k + 1/2)|\phi_k\rangle$. Merk op dat de bases $\{|\psi_k\rangle\}$ en $\{|\phi_k\rangle\}$ verschillend zijn.

c) *(10 points)* Geef een uitdrukking voor de exacte toestand voor $t > 0$.

d) *(10 points)* Welke mogelijke waarden kunnen gevonden worden voor $t > 0$ bij een meting van de energie? Geef een uitdrukking voor de kans op elk van die waarden.

e) *(20 points)* Bereken expliciet de kans om de laagst mogelijke energiewaarde te meten voor $t > 0$. Als $\lambda = 0$ blijkt deze kans 1 te zijn. Leg uit waarom. Bij deze opgave kunt u gebruiken dat

$$\langle x|\psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} ,$$

en ook:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$$

f) *(10 points)* Beredeneer op grond van het resultaat bij e) dat de verwachtingswaarde van de energie voor $t > 0$ groter is dan het grondniveau van H_2.