

Midterm Exam Advanced Quantum Mechanics (total 100 points)

Tuesday, 9 December, 2014, 13:15-15:15

1. Use a separate sheet for every exercise.
2. Write your name and initials on all sheets, on the first sheet also your student ID number.
3. Write clearly, unreadable work cannot be corrected.
4. Give the motivation, explanation, and calculations leading up to each answer and/or solution.
5. Do not spend a large amount of time on finding (small) calculational errors. If you suspect you have made such an error, point it out in words.

Instantane verandering van een harmonische potentiaal — We beschouwen een 1-dimensionale harmonische oscillator met frequentie ω en massa m die op tijdstip $t = 0$ instantaan verschoven wordt over een afstand λx_0 , waarbij $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ de harmonische-oscillator lengte en met λ een klein dimensieloos getal. Dat wil zeggen, de hamiltoniaan wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} H &= H_1 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \text{ voor } t < 0; \\ H &= H_2 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x} - \lambda x_0)^2, \text{ voor } t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Verder is gegeven dat het deeltje zich voor $t = 0$ bevindt in de stationaire toestand die hoort bij het grondniveau van H_1 :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|\psi_0\rangle,$$

waarbij $|\psi_0\rangle$ de grondtoestand van de hamiltoniaan H_1 . Meer algemeen voldoen de eigentoestanden aan $H_1|\psi_k\rangle = \hbar\omega(k + 1/2)|\psi_k\rangle$.

- ↪ a) (30 points) Pas voor $t > 0$ tijdsafhankelijke storingsrekening toe om te laten zien dat tot op eerste orde in λ de toestand voor $t > 0$ gegeven wordt door:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|\psi_0\rangle + \lambda x_0 \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} (e^{i\omega t} - 1) |\psi_1\rangle.$$

Laat hiervoor ook zien dat (dit heeft u nodig in uitwerking van bovenstaand):

$$\langle \psi_k | \hat{x} | \psi_0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{k,1}.$$

- ⊲ b) (20 points) Beredeneer dat de verwachtingswaarde van de energie voor $t > 0$ behouden is, d.w.z. $\langle \Psi(t) | H_2 | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | H_2 | \Psi(0) \rangle$, en bereken deze verwachtingswaarde exact. Laat zien dat deze verwachtingswaarde groter is dan $\hbar\omega/2$, het grondniveau van H_2 .

Het probleem van de instantane verschuiving kan ook exact worden opgelost door de toestand voor $t > 0$ te ontwikkelen naar eigentoestanden van de hamiltoniaan H_2 die voldoen aan: $H_2|\phi_k\rangle = \hbar\omega(k + 1/2)|\phi_k\rangle$. Merk op dat de bases $\{|\psi_k\rangle\}$ en $\{|\phi_k\rangle\}$ verschillend zijn.

- c) (10 points) Geef een uitdrukking voor de exacte toestand voor $t > 0$.
- d) (10 points) Welke mogelijke waarden kunnen gevonden worden voor $t > 0$ bij een meting van de energie? Geef een uitdrukking voor de kans op elk van die waarden.
- e) (20 points) Bereken expliciet de kans om de laagst mogelijke energiewaarde te meten voor $t > 0$. Als $\lambda = 0$ blijkt deze kans 1 te zijn. Leg uit waarom. Bij deze opgave kunt u gebruiken dat

$$\langle x|\psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},$$

en ook:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

- f) (10 points) Beredeneer op grond van het resultaat bij e) dat de verwachtingswaarde van de energie voor $t > 0$ groter is dan het grondniveau van H_2 .

