

1

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA  
UNIVERSITEIT UTRECHT

## TENTAMEN QUANTUM MECHANICA 2

Woensdag 5 november 2007, 14.00-16.00 uur

- 1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.
- 2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!
- 3) Alleen het boek *Modern Quantum Mechanics* mag bij het tentamen gebruikt worden.



### Opgave: Spin-1/2 in een magneetveld

Beschouw een (electrisch neutraal) deeltje met spin 1/2 in een magneetveld  $\mathbf{B}$ . We beschouwen in het vervolg alleen de spin vrijheidsgraad van het deeltje en verwaarlozen verder de ruimtelijke beweging van het deeltje. De Hamiltoniaan van het deeltje wordt dan

$$\hat{H} = -\frac{\mu}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (1)$$

met  $\mu/2$  het magnetisch moment van het deeltje en  $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$  de vector van spinoperatoren. We introduceren ook nog de vector  $\Omega(t) \equiv 2\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle(t)/\hbar$ .

- a) Laat met behulp van het Schrödingerbeeld zien dat de bewegingsvergelijking van  $\Omega(t)$  gegeven wordt door

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar} \mathbf{B} \times \Omega(t). \quad (2)$$

- b) Geef ook  $d\hat{S}_H(t)/dt$  in het Heisenbergbeeld en vergelijk uw antwoord met het resultaat van onderdeel a).
- c) Laat nu zien dat  $|\Omega(t)| = 1$ , zodat de vector  $\Omega(t)$  zich beweegt over het oppervlak van een eenheidsbol.
- d) Laat ook zien dat voor de algemene spin toestand

$$\cos(\vartheta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle,$$

met  $|\pm\rangle$  de eigentoestanden van  $\hat{S}_z$  met eigenwaarde  $\pm\hbar/2$ , respectievelijk, geldt dat  $\Omega = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ .

- e) Beargumenteer dat volgens vergelijking (2) de vector  $\Omega(t)$  precedeert om het aangelegde magneetveld  $\mathbf{B}$ . Schets de baan van  $\Omega(t)$  op het boloppervlak.

We beschouwen nu het zogenaamde Ramsey experiment. In dit experiment wordt allereerst voor een vaste tijdsduur  $\pi\hbar/2\mu B$  een magneetveld  $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$  langs de x-as aangelegd. Daarna wordt voor een variabele tijdsduur  $T$  een magneetveld  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  langs de z-as aangelegd, en tenslotte wordt wederom voor een vaste tijdsduur  $\pi\hbar/2\mu B$  een magneetveld  $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$  langs de x-as aangelegd.

- f) De evolutie in de eerste en de laatste periode staat bekend als een " $\pi/2$ -puls". Beargumenteer waarom dit het geval is.
- g) Geef de tijdsduur  $T$  waarvoor geldt dat  $P(T) = 1$ , waarbij  $P(T)$  de kans is dat de spin zich na de drie periodes weer in de  $|+\rangle$  bevindt, als de spin zich in het begin van het experiment ook in deze toestand bevond. Dit is mogelijk zonder een expliciete berekening van  $P(T)$ !
- h) Bereken nu de kans  $P(T)$  als functie van de duur  $T$  van het tweede tijdsinterval.

