

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA  
UNIVERSITEIT UTRECHT

TENTAMEN QUANTUM MECHANICA 2

Dinsdag 27 januari 2009, 15.00-18.00 uur

- 1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.
- 2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!
- 3) Alleen de werkkollegedictaten *Opgaven bij Quantummechanica 2* mogen bij het tentamen gebruikt worden.

### Opgave 1: Spin-baan koppeling

Beschouw een deeltje met massa  $m$  en spin  $1/2$  dat zich alleen in het twee-dimensionale XY-vlak kan bewegen. Ten gevolge van spin-baan koppeling wordt de zogenaamde Rashba Hamiltoniaan van het deeltje gegeven door

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{2\alpha_R\mu}{\hbar} (\hat{S}_x\hat{p}_y - \hat{S}_y\hat{p}_x), \quad (1)$$

met  $\alpha_R$  een constante en  $\mu$  de grootte van het magnetisch moment van het deeltje en  $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$  de drie-dimensionale vector van spinoperatoren.

- Bepaal de eigentoestanden en eigenwaarden van deze Hamiltoniaan.
- Geef het effectieve magneetveld  $\langle B^{\text{eff}} \rangle$  dat de spin van het deeltje voelt, als het baan deel van de golffunctie gelijk is aan één van zijn eigentoestanden.
- Laat ook zien dat voor de algemene spin toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{i\varphi}|-\rangle),$$

met  $|\pm\rangle$  de eigentoestanden van  $\hat{S}_z$  met eigenwaarde  $\pm\hbar/2$ , respectievelijk, geldt dat  $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \hbar/2$ .

- Beargumenteer nu op grond van uw resultaten in onderdelen b) en c) wat de eigentoestanden en eigenwaarden van deze Hamiltoniaan zijn en vergelijk dit met uw antwoord in onderdeel a).

### Opgave 2: Variatierekening

Beschouw de een-dimensionale tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking voor een deeltje met massa  $m$  in de potentiaal  $V(x) = A|x|$  met  $A > 0$  gegeven door

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + A|x| \right\} \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2)$$

- Beargumenteer waarom de golffunctie  $\Psi(x)$  voor de grondtoestand van deze potentiaal symmetrisch in de positie  $x$  moet zijn, d.w.z. de golffunctie moet voldoen aan  $\Psi(x) = \Psi(-x)$ .
- Bedenk een fysisch relevante probeer-golffunctie met één variationele parameter  $\alpha$  en bepaal hiermee een benadering voor de energie en de golffunctie van de grondtoestand.
- Voeg nu aan de potentiaal  $V(x) = A|x|$  de storingsterm  $Bx^2$  toe. Bepaal met behulp van de probeer-golffunctie tot op eerste orde in  $B$  de verandering van de grondtoestandsenergie. Laat zien dat deze storingsrekening geoorloofd is als  $B \ll (2mA^4/\hbar^2)^{1/3}$ .

### Opgave 1: Spin-baan koppeling

Beschouw een deeltje met massa  $m$  en spin  $1/2$  dat zich alleen in het twee-dimensionale XY-vlak kan bewegen. Ten gevolge van spin-baan koppeling wordt de zogenaamde Rashba Hamiltoniaan van het deeltje gegeven door

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{2\alpha_R\mu}{\hbar} (\hat{S}_x\hat{p}_y - \hat{S}_y\hat{p}_x), \quad (1)$$

met  $\alpha_R$  een constante en  $\mu$  de grootte van het magnetisch moment van het deeltje en  $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$  de drie-dimensionale vector van spinoperatoren.

- Bepaal de eigentoestanden en eigenwaarden van deze Hamiltoniaan.
- Geef het effectieve magneetveld  $\langle B^{\text{eff}} \rangle$  dat de spin van het deeltje voelt, als het baan deel van de golf functie gelijk is aan één van zijn eigentoestanden.
- Laat ook zien dat voor de algemene spin toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle),$$

met  $|\pm\rangle$  de eigentoestanden van  $\hat{S}_z$  met eigenwaarde  $\pm\hbar/2$ , respectievelijk, geldt dat  $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \hbar/2$ .

- Beargumenteer nu op grond van uw resultaten in onderdelen b) en c) wat de eigentoestanden en eigenwaarden van deze Hamiltoniaan zijn en vergelijk dit met uw antwoord in onderdeel a).

### Opgave 2: Variatierekening

Beschouw de een-dimensionale tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking voor een deeltje met massa  $m$  in de potentiaal  $V(x) = A|x|$  met  $A > 0$  gegeven door

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + A|x| \right\} \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2)$$

- Beargumenteer waarom de golf functie  $\Psi(x)$  voor de grondtoestand van deze potentiaal symmetrisch in de positie  $x$  moet zijn, d.w.z. de golf functie moet voldoen aan  $\Psi(x) = \Psi(-x)$ .
- Bedenk een fysisch relevante probeer-golf functie met één variationele parameter  $\alpha$  en bepaal hiermee een benadering voor de energie en de golf functie van de grondtoestand.
- Voeg nu aan de potentiaal  $V(x) = A|x|$  de storingsterm  $Bx^2$  toe. Bepaal met behulp van de probeer-golf functie tot op eerste orde in  $B$  de verandering van de grondtoestandsenergie. Laat zien dat deze storingsrekening geoorloofd is als  $B \ll (2mA^4/\hbar^2)^{1/3}$ .

