MO-2006B/50

prioriteit: ~~3~~ 2

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA
UNIVERSITEIT UTRECHT

HER-TENTAMEN Quantummechanica 2

Dinsdag, 20 Maart 2007, 09:00 - 12:00. Lokaal BBL105b

1) Begin elke opgave op een afzonderlijk blad.
2) Schrijf op elk blad je naam.
3) Schrijf duidelijk en leesbaar !
4) Het tentamen bestaat uit 3 opgaven.

1. Tijdsevolutie

Gegeven de Hamiltoniaan voor een spin-1 systeem:

$$H = A(S_x^2 - S_y^2) \,, \tag{1}$$

waarbij A een reëel getal is, en (we stellen $\hbar = 1$ voor het gemak),

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \,, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{2}$$

spin-1 operatoren.

- Bepaal de eigenwaarden en een basis van orthonormale eigentoestanden van de Hamiltoniaan.
- Bereken expliciet de evolutie operator

  $$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \,, \tag{3}$$

  in matrix-vorm. Toon aan dat deze vorm voor de evolutie operator voldoet aan de Schrödinger vergelijking.
- Bepaal met behulp van $U(t, t_0)$ hoe de eigentoestanden evolueren in de tijd.

2. Twee deeltjes

Beschouw twee deeltjes met spin $j_1 = 1/2$ en $j_2 = 3/2$, en bijbehorende toestanden $|j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{3}{2}; m_1, m_2 >$ die we kortweg noteren als $|m_1, m_2 >$. Uit de theorie van het optellen van impulsmoment $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ weten we dat er een andere basis is van toestanden $|j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{3}{2}; j, m >$ die we kortweg noteren als $|j, m >$. We kunnen dan de basiselementen $|j, m >$ uitdrukken in termen van de basis $|m_1, m_2 >$.

- Gebruik makende van de ladderoperatoren $J_\pm$, die in het algemeen voldoen aan $J_\pm |j, m >= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1 >$, ontbind de toestanden

$$|j = 2, m = 1\rangle \ , \qquad \text{en} \qquad |j = 1, m = 1\rangle \ , \tag{4}$$

in de basis $|m_1, m_2 >$.

Beschouw nu een systeem van twee identieke spin-3/2 deeltjes, en veronderstel dat de totale golffunctie kan geschreven worden als het product van een ruimtelijk deel en een spin-deel:

$$\psi(\vec{x}_1, m_1; \vec{x}_2, m_2) = \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\, \chi(m_1, m_2) \ . \tag{5}$$

- Als het ruimtelijk deel $\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ symmetrisch is onder het verwisselen van de twee deeltjes, hoeveel mogelijke golffuncties kan je dan bedenken voor het spin-deel $\chi(m_1, m_2)$?
- Als het ruimtelijk deel antisymmetrisch is onder het verwisselen van de twee deeltjes, hoeveel mogelijke golffuncties kan je dan bedenken voor het spin-deel ?

3. Tijdsafhankelijke storingstheorie

We beschouwen een deeltje in een 1-dimensionale harmonische potentiaal. Op $t = 0$ wordt de hoekfrequentie instantaan veranderd van ω_1 naar $\omega_2 = \omega_1\sqrt{1+g}$, met $0 \leq g << 1$. De Hamiltoniaan wordt dus gegeven door

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 \ , \qquad \text{voor } t < 0 \ , \tag{6}$$

en

$$H_2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 + g\frac{m\omega_1^2}{2}x^2 \ , \qquad \text{voor } t > 0 \ . \tag{7}$$

Verder is gegeven dat het deeltje zich voor $t \leq 0$ bevindt in de stationaire toestand die hoort bij het grondniveau van H_1:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega_1 t}|\psi_0\rangle \ . \tag{8}$$

- Beschouw $g\frac{m\omega_1^2}{2}x^2$ als storingsterm, en pas voor $t > 0$ tijdsafhankelijke storingstheorie toe. Laat zien dat tot op eerste orde in g de toestand voor $t > 0$ gegeven wordt door:

$$|\Psi(t)\rangle = (1 - \frac{i}{4}g\omega_1 t)e^{-\frac{1}{2}i\omega_1 t}|\psi_0\rangle - \frac{\sqrt{2}}{8}g(e^{-\frac{1}{2}i\omega_1 t} - e^{-\frac{5}{2}i\omega_1 t})|\psi_2\rangle + O(g^2)\,, \quad (9)$$

  met $\{|\psi_k\rangle\}$ de verzameling van eigentoestanden van H_1, waarvoor dus geldt: $H_1|\psi_k\rangle = \hbar\omega_1(k + \frac{1}{2})|\psi_k\rangle$.

  Hint: u mag gebruiken dat $\langle\psi_k|x^2|\psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_1}(\delta_{k,0} + \sqrt{2}\delta_{k,2})$.

Ter herinnering: de algemene oplossing van de Schrödinger vergelijking kan geschreven worden als

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|\psi_k\rangle\,, \quad (10)$$

met E_k en $|\psi_k\rangle$ de eigenwaarden en eigentoestanden van H_1, en waarbij $c_k(t)$ tijdsafhankelijke coëfficiënten zijn die u in storingstheorie kan bepalen uit de Schrödinger vergelijking, gebruik makende van de machtreeks

$$c_k(t) = c_k^{(0)}(t) + gc_k^{(1)}(t) + g^2c_k^{(2)}(t) + \cdots\,. \quad (11)$$