

per 1 +2 Prioriteit 2

Voor de open-TSC  
avond - Schot

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA  
UNIVERSITEIT UTRECHT

MID-TERM TENTAMEN Quantummechanica 2 15-356 B

Dinsdag, 6 November 2007, 09:00 - 12:00, Lokalen BBL105b,106,107A.

- 1) Begin elke opgave op een afzonderlijk blad.
- 2) Schrijf op elk blad je naam.
- 3) Schrijf duidelijk en leesbaar !
- 4) Het tentamen bestaat uit 3 opgaven.

5) Geen rekenmachine

### 1. Systeem met twee toestanden

Beschouw de volgende Hamiltoniaan voor een systeem met twee orthonormale toestanden  $|1\rangle$  en  $|2\rangle$ :

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) , \quad (1)$$

waarbij  $a$  een willekeurig reëel getal is.

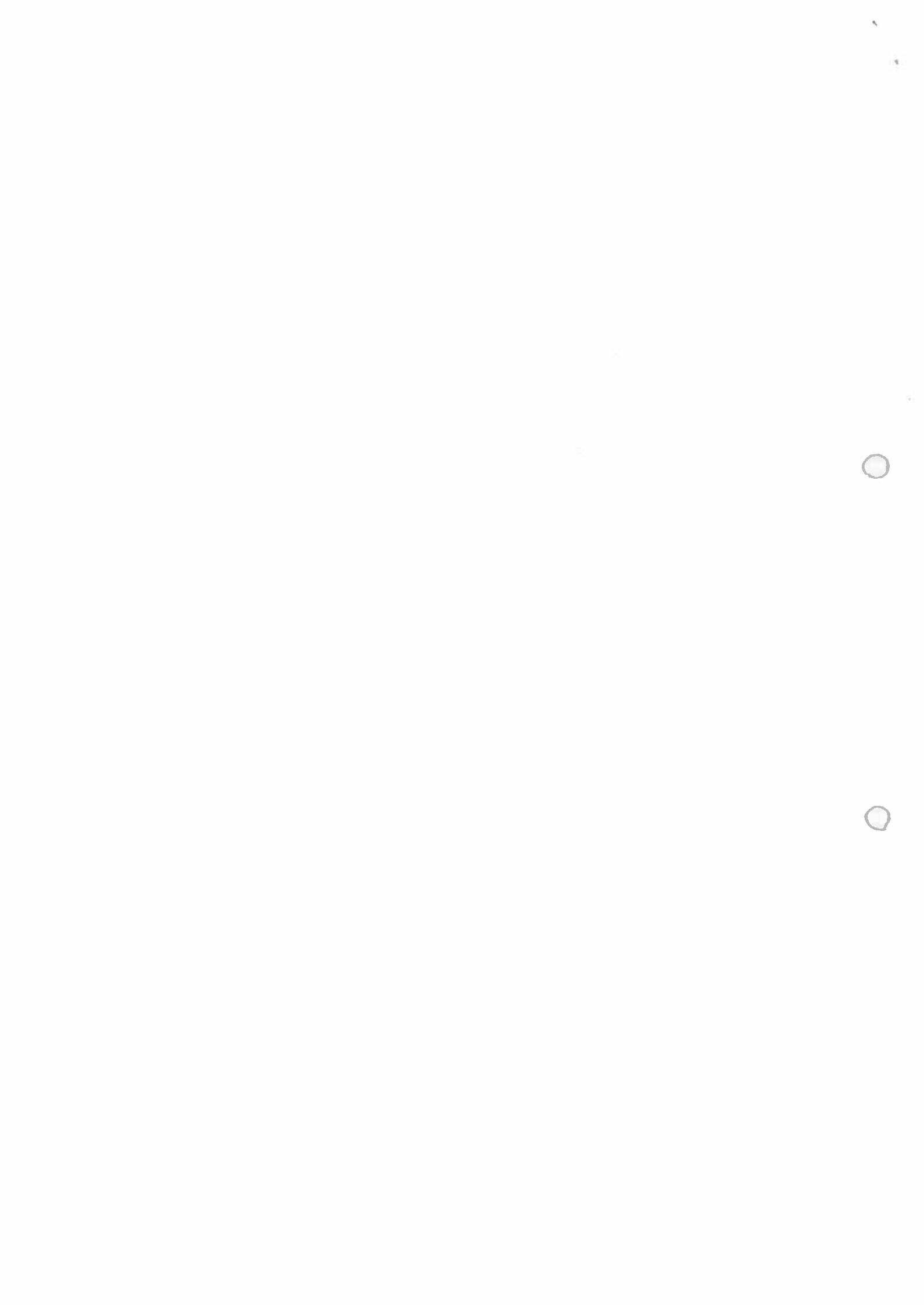
- Geef de matrixvoorstelling van  $H$  in de basis  $|1\rangle$  en  $|2\rangle$ .
- Bepaal de eigenwaarden en genormeerde eigentoestanden (als lineaire combinaties van  $|1\rangle$  en  $|2\rangle$ ).

### 2. Niet compatible observabelen

Gegeven twee incompatibele observabelen  $A$  en  $B$  (d.w.z. beiden zijn hermitisch, maar  $[A, B] \neq 0$ ), met orthonormale bases van eigenkets  $|a_i\rangle$  en  $|b_i\rangle$ , en bijbehorende eigenwaarden  $a_i$  en  $b_i$ . De ene basis kan uitgedrukt worden in termen van de andere via de operator

$$|b_i\rangle = U|a_i\rangle , \quad U \equiv \sum_k |b_k\rangle\langle a_k| . \quad (2)$$

- Bewijs dat  $U$  unitair is.
- Wat zijn de matrixelementen van  $U$  in de bases  $|a_i\rangle$  en  $|b_i\rangle$  ?



- Toon aan dat de operatoren  $A$  en  $UAU^{-1}$  hetzelfde spectrum van eigenwaarden hebben, voor een algemene unitaire operator  $U$ .
- Pas dit laatste toe voor  $A = X$ , de plaatsoperator, en  $U = e^{i\hbar^{-1}aP}$  ( $a$  is een willekeurig reëel getal, en  $P$  de impulsoperator). Bereken daarvoor expliciet  $UXU^{-1}$  en geef aan waarom deze operator dezelfde eigenwaarden heeft als  $X$ .

### 3. Impulsmoment

In de theorie van het impulsmoment voldoen de ladder operatoren aan

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)\hbar}|j, m \pm 1\rangle, \quad (3)$$

met  $-j \leq m \leq j$ . Beschouw nu een deeltje met spin  $3/2$ , i.e.  $j = 3/2$ .

- Bereken de matrix elementen van  $J_y = (J_+ - J_-)/2i$  en  $J_x = (J_+ + J_-)/2$  in de basis  $|\frac{3}{2}, m\rangle$ . Schrijf het resultaat voor  $J_y$  en  $J_x$  als een  $4 \times 4$  matrix.
- Bereken de commutator

$$[J_x, J_y]. \quad (4)$$

Voldoet uw resultaat aan de algemene theorie van het impulsmoment ?

