Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-356b werd in 2005/2006 gegeven door dr. S.J.G. Vandoren.

Herkansing Quantummechanica 2 (NS-356b)
21 maart 2006

Opgave 1. Schrödinger en Heisenberg beeld

Met behulp van de evolutie operator

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}, \tag{1}$$

worden tijdsonafhankelijke operatoren X_S in het Schrödingerbeeld gerelateerd aan tijdsafhankelijke operatoren $X_H(t)$ in het Heisenbergbeeld via (we stellen $t_0 = 0$ van nu af aan)

$$X_H(t) = U^\dagger(t) X_S U(t). \tag{2}$$

Beschouw nu het vrije deeltje in één dimensie met Hamiltoniaan $H = \frac{P^2}{2m}$.

a) Gebruik makende van $[X_S, P] = i\hbar$, toon aan dat $[X_S, P^n] = ni\hbar P^{n-1}$.

b) Wanneer X_S overeenkomt met de positie-operator in het Schrödingerbeeld, bereken dan uit (2) en (1) de tijdsafhankelijke Heisenberg positieoperator $X_H(t)$. Gebruik hierbij de identiteit $U^\dagger X_S U = U^\dagger[X_S, U] + X_S$, en bereken de commutator $[X_S, U]$ expliciet.

c) Toon aan dat uw antwoord ook volgt uit de oplossing van de Heisenbergvergelijking

$$\frac{\partial X_H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[X_H, H]. \tag{3}$$

Opgave 2. Clebsch-Gordan coëfficiënten

Beschouw twee deeltjes met baan-impulsmoment $j_1 = 1$ en $j_2 = 1$, en bijbehorende toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1, m_2\rangle$ die we kortweg noteren als $|m_1, m_2\rangle$. Uit de theorie van het optellen van impulsmoment $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ weten we dat er een andere basis is van toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1, m\rangle$ die we kortweg noteren als $|j, m\rangle$.
We kunnen nu de basiselementen $|j, m\rangle$ uitdrukken in termen van de basis $|m_1, m_2\rangle$. De bijbehorende Clebsch-Gordan coëfficiënten worden in deze opgave reëel verondersteld.

a) Gebruik makende van de ladderoperatoren $J_\pm$, die in het algemeen voldoen aan $J_\pm|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar|j, m \pm 1\rangle$, bewijs dat

$$|j = 2, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 1, m_2 = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0, m_2 = 1\rangle. \tag{4}$$

b) Analoog, ontbind de toestand

$$|j = 2, m = 0\rangle, \tag{5}$$

in de basis $|m_1, m_2\rangle$.

Opgave 3. Tijdsonafhankelijke storingstheorie

Gegeven de Hamiltoniaan voor een spin-1 systeem:

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2), \tag{6}$$

waarbij A en B reële getallen zijn, en (we stellen $\hbar = 1$ voor het gemak),

$$s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

de spin-1 operatoren.

a) Bereken de *exacte* eigenwaarden E_n en eigenvectoren van deze Hamiltoniaan.

b) Beschouw nu de situatie waarbij A klein is zodat we storingstheorie kunnen doen rond de ongestoorde Hamiltoniaan $H_0 = B(S_x^2 - S_y^2)$. Bereken de eerste correctie op de ongestoorde eigenwaarden $E_n^{(0)}$ en vergelijk uw antwoord met het exacte resultaat.

c) Beschouw nu de situatie waarbij B klein is, zodat we storingstheorie kunnen doen rond de ongestoorde Hamiltoniaan $H_0' = AS_z^2$. Bereken opnieuw de eerste correctie op de ongestoorde eigenwaarden $E_n'^{(0)}$ en vergelijk uw antwoord met het exacte resultaat.

Ter herinnering: de correcties op de ongestoorde energie eigenwaarden zijn (in de notatie van het collegedictaat)

$$E_n^{(\lambda)} - E_n^{(0)} = \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \ldots, \tag{8}$$

met $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle, |n^{(0)}\rangle$ de ongestoorde eigentoestanden, en λV is de storing. In geval van ontaarding moet V_{nn} uitgerekend worden in een basis waarin V diagonaal is.