

## Quantummechanica 2 (NS-356b)

### 8 november 2005

#### Opgave 1. Spin

Vind de eigenwaarden en een orthonormale basis van eigentoestanden van de Pauli-matrix

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Veronderstel nu dat een deeltje in de spin-toestand  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  is, met  $\alpha$  en  $\beta$  twee willekeurige complexe getallen die voldoen aan  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Wat is de kans om bij meting van  $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$  de waarde  $\frac{\hbar}{2}$  te vinden?

#### Opgave 2. Onzekerheidsrelatie

Beschouw een één-dimensionaal deeltje in een potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < a, \\ \infty & \text{elders} \end{cases}$$

- Bepaal de genormaliseerde (tijsonafhankelijke) eigenfuncties  $\psi_n(x)$ .
- Bereken de verwachtingswaarden  $\langle X \rangle$  en  $\langle P \rangle$  in de eigentoestanden  $\psi_n(x)$ . [Indien u het juiste antwoord kan bepalen zonder een berekening te doen, is dat ook goed. Motiveer dan wel uw antwoord.]
- Bereken ook  $\langle (\Delta X)^2 \rangle$  en  $\langle (\Delta P)^2 \rangle$ . De definities zijn dat  $\Delta A \equiv A - \langle A \rangle$ , met  $\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ .

Verifieer de onzekerheidsrelatie  $\langle (\Delta X)^2 \rangle \langle (\Delta P)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$ . Wat is het resultaat voor de grondtoestand?

#### Opgave 3. Impulsmoment

In de theorie van het impulsmoment voldoen de ladderoperatoren aan

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar |j, m \pm 1\rangle,$$

met  $-j \leq m \leq j$ . Beschouw nu een deeltje met spin 1, i.e.  $j = 1$ .

- Bereken de matricelementen van  $J_y = (J_+ - J_-)/2i$  in de basis  $\{|1, m\rangle\}$ . Schrijf het resultaat voor  $J_y$  als een  $3 \times 3$  matrix.
- Bereken, via de machtreeks van de exponent, de matricelementen

$$D_{m'm}^{(j=1)} \equiv \langle 1, m' | e^{-iJ_y \phi / \hbar} | 1, m \rangle,$$

waarbij  $\phi$  een hoek is die de rotatie over de  $y$ -as beschrijft.

- Naar welke toestanden transformeren de kets  $|1, 1\rangle$  en  $|1, -1\rangle$  onder een rotatie rond de  $y$ -as over een hoek  $\phi = \pi$ ? [Ook hier is het mogelijk het antwoord te bepalen zonder gebruik te maken van vorige berekening.]