DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-356B WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR S.J.G. VANDOREN.

Quantummechanica 2 (NS-356b)
31 januari 2006

Opgave 1: Clebsch-Gordan coëfficiënten

Beschouw twee deeltjes met baan-impulsmoment $j_1 = 1$ en $j_2 = 1$, en bijbehorende toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1, m_2\rangle$ die we kortweg noteren als $|m_1, m_2\rangle$. Uit de theorie van het optellen van impulsmoment $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ weten we dat er een andere basis is van toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1; j, m\rangle$ die we kortweg noteren als $|j, m\rangle$.

a) Hoeveel basiselementen $|j, m\rangle$ zijn er, i.e. wat zijn de mogelijke waarden van j en m?

We kunnen nu de basiselementen $|j, m\rangle$ uitdrukken in termen van de basis $|m_1, m_2\rangle$. De bijbehorende Clebsch-Gordan coëfficiënten worden in deze opgave reëel verondersteld.

b) Gebruik makende van de ladderoperatoren $J_\pm$, die in het algemeen voldoen aan $J_\pm|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar|j, m \pm 1\rangle$, bewijs dat

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 1, m_2 = 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0, m_2 = 1\rangle \tag{1}$$

c) Analoog, ontbind de toestand

$$|j = 1, m = 1\rangle \tag{2}$$

in de basis $|m_1, m_2\rangle$.

Opgave 2: Tijdsonafhankelijke storingstheorie

Gegeven de Hamiltoniaan voor een twee-toestanden systeem:

$$H = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Het is duidelijk dat de eigenwaarden voor het ongestoorde ($\lambda = 0$) probleem $E_1^{(0)}$ en $E_2^{(0)}$ zijn, met bijbehorende eigenvectoren

$$\phi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

respectievelijk.

a) Wat zijn de *exacte* eigenwaarden $E_1^{(\lambda)}$ en $E_2^{(\lambda)}$ voor willekeurige waarden van λ?

b) Stel nu dat $|E_1^{(0)} - E_2^{(0)}| >> \lambda\Delta$, bereken nu de correcties op de energie eigenwaarden gebruik makende van tijdsonafhankelijke storingstheorie tot op kwadratisch niveau in λ. Vergelijk uw resultaten met het exacte resultaat voor $E_1^{(\lambda)}$ en $E_2^{(\lambda)}$ in de benadering dat $|E_1^{(0)} - E_2^{(0)}| \gg \lambda\Delta$.

c) Stel nu dat $|E_1^{(0)} - E_2^{(0)}| \ll \lambda\Delta$. Toon aan dat het exacte resultaat voor $E_1^{(\lambda)}$ en $E_2^{(\lambda)}$ in deze benadering goed overeenkomt met wat u zou verkrijgen door toepassing van storingstheorie met ontaarding (waarvoor $E_1^{(0)} = E_2^{(0)}$), tot op eerste orde in λ.

Ter herinnering: de correcties op de ongestoorde energie eigenwaarden zijn (in de notatie van het collegedictaat)

$$E_n^{(\lambda)} - E_n^{(0)} = \lambda V_{nn} + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|Vnk|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \ldots, \tag{5}$$

met $V_{nk} = \langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle, |n^{(0)}\rangle$ de ongestoorde eigentoestanden, en $\lambda\Delta$ is de storing. In geval van ontaarding moet V_{nn} uitgerekend worden in een basis waarin V diagonaal is.

Opgave 3: Verstrooiing aan een Yukawa-potentiaal

De differentiële werkzame doorsnede van een verstrooiingsproces in een sferisch symmetrisch potentiaal wordt gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(k,\theta) = |f(k,\theta)|^2, \tag{6}$$

waarbij θ de verstrooiingshoek is en k de grootte van het momentum van het inkomende deeltje met massa m. In de eerste Born-benadering geldt er

$$f^{(1)}(k,\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty \mathrm{d}r\; rV(r)\sin(qr) \tag{7}$$

waarbij $q = 2k\sin(\theta/2)$. Beschouw de Yukawa-potentiaal

$$V = g^2\frac{e^{-\mu r}}{r}, \tag{8}$$

met μ en g constanten.

a) Bereken de differentiële werkzame doorsnede.

b) Toon aan dat de totale werkzame doorsnede gegeven wordt door

$$\sigma(k) = \frac{16\pi m^2 g^4}{\hbar^2\mu^2(\mu^2+4k^2)} \tag{9}$$

c) In de limiet $\mu \to 0$ divergeert de totale werkzame doorsnede. Wat betekent zulk een divergentie? Hoe kan u dit verklaren?