Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-356b werd in 2004/2005 gegeven door dr. C.W.J.M. Klaassen.

Quantummechanica 2 (NS-356b)
11 november 2004

Algemene gegevens

In dit tentamen kunt u er gebruik van maken dat voor een impulsmoment $\vec{J}$ in het algemeen geldt (d.w.z., onderstaande geldt voor een baanimpulsmoment, spinimpulsmoment, totaal impulsmoment, etc.):

$$J_k^\dagger = J_k; \qquad \vec{J}^{\,2}|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle;$$

$$[J_k, J_l] = \sum_{m=1}^{3} \mathrm{i}\hbar\epsilon_{klm}J_m; \qquad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle;$$

$$\left[\vec{J}^{\,2}, J_k\right] = 0; \qquad J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\hbar|j,m\pm 1\rangle,$$

waarbij $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i}J_y$.
Verder mag u zonder bewijs gebruik maken van de gebruikelijke regels om kets en bra's in elkaar om te zetten, en van algemene eigenschappen van hermitische toevoeging, bijv. $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger, (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Ook kunt u gebruik maken van de gebruikelijke eigenschappen van exponentiatie, bijv.:

- $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$, $(\mathrm{e}^A)^\dagger = \mathrm{e}^{A^\dagger}$;
- Als v een eigenvector is van A bij eigenwaarde λ, dan is v ook een eigenvector van e^A, en wel bij eigenwaarde e^λ.
- Als s een reële variabele is, en A een operator die niet van s afhangt, dan geldt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{sA} = A\mathrm{e}^{sA} = \mathrm{e}^{sA}A$.

Opgave 1. Een beginwaardeprobleem voor een deeltje op een bolschil

(30 punten)

We beschouwen in deze opgave een spinloos deeltje dat zich op een bolschil beweegt. De golffunctie voor dit deeltje heeft dus alleen maar een hoekafhankelijkheid. De Hamiltoniaan van dit deeltje is:

$$H = A\vec{L}^2 + BL_z, \quad A, B > 0.$$

Verder is gegeven dat het deeltje zich op tijdstip $t = 0$ in een gemeenschappelijke eigentoestand van $\vec{L}^2$ en L_y bevindt bij eigenwaarden $2\hbar^2$ resp. $\hbar$. U mag er in het vervolg van deze opgave zonder bewijs gebruik van maken dat deze toestand gegeven wordt door:

$$\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle.$$

In de plaatsrepresentatie (in bolcoördinaten) zijn de toestanden $|l,m\rangle$ op de gebruikelijke manier geassocieerd met de bolfuncties $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$.

a) Leid af dat geldt:

$$\begin{aligned} \langle L_x\rangle(0) &= 0; \\ \langle L_y\rangle(0) &= \hbar; \\ \langle L_z\rangle(0) &= 0. \end{aligned}$$

b) Leid af dat geldt:

$$\begin{aligned} \langle L_x\rangle(t) &= -\hbar\sin Bt; \\ \langle L_y\rangle(t) &= \hbar\cos Bt; \qquad (1) \\ \langle L_z\rangle(t) &= 0. \end{aligned}$$

Hint: U mag zonder bewijs gebruik maken van de gegeneraliseerde stelling van Ehrenfest, die zegt dat voor de verwachtingswaarde van een (eventueel expliciet tijdsafhankelijke) operator O geldt:

$$\frac{\mathrm{d}\langle O\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle[O,H]\rangle + \left\langle\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}\right\rangle.$$

c) Leid af dat de toestand van het deeltje op tijdstip t gegeven wordt door:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-2\mathrm{i}A\hbar t}\left(\tfrac{1}{2}e^{-\mathrm{i}Bt}|1,1\rangle + \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \tfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}Bt}|1,-1\rangle\right).$$

U kunt hierbij zonder bewijs gebruik maken van de gebruikelijke manieren om een beginwaardeprobleem op te lossen.

Het deeltje bevindt zich dus steeds in een lineaire combinatie van toestanden met $l = 1$. Hieruit volgt dat de enig mogelijke uitkomsten van een meting van zowel L_x, L_y als L_z gegeven wordt door: $\hbar$, 0 en $-\hbar$.

d) Bereken voor een meting van L_y de kans op elk van die uitkomsten als functie van de tijd.

Hint: Begin om het rekenwerk te beperken als volgt. Bereken eerst op de gebruikelijke manier de kans om de uitkomst $\hbar$ te meten op tijdstip t. Maak vervolgens gebruik van (1) en van de relatie tussen een verwachtingswaarde en de kansen op meetuitkomsten.

Opgave 2. Een systeem van twee spin-1 deeltjes

(25 punten)

De spinruimte $T_{s_1=1} \otimes T_{s_2=1}$ van een systeem van twee onderscheidbare spin-1 deeltjes is $(2s_1+1)(2s_2+1) = 9$-dimensionaal. Twee veel gebruikte bases van deze ruimte zijn die van direct-product toestanden $|s_1 = 1, s_2 = 1; m_1, m_2\rangle$ en die van totaal-impulsmoment toestanden $|s_1 = 1, s_2 = 1; S, M\rangle$. In termen van de totaal-impulsmoment toestanden wordt $T_{s_1=1} \otimes T_{s_2=1}$ opgespannen door een quintuplet ($S = 2$), een triplet ($S = 1$) en een singlet ($S = 0$).
In deze opgave beginnen we met de twee bases in elkaar uit te drukken. Daarbij hanteren we een verkorte notatie, waarbij bijvoorbeeld $|1,0\rangle_{m_1,m_2}$ een afkorting is voor $|s_1 = 1, s_2 = 1; m_1 = 1, m_2 = 0\rangle$, terwijl $|1,0\rangle_{S,M}$ een afkorting is voor $|s_1 = 1, s_2 = 1; S = 1, M = 0$.

a) Toon aan dat geldt: ${}_{m_1,m_2}\langle m_1, m_2|S, M\rangle_{S,M} = 0$, als $m_1 + m_2 \neq M$.

b) Beredeneer dat geldt (op een vrij te kiezen fasefactor na):

$$|2,2\rangle_{S,M} = |1,1\rangle_{m_1,m_2}. \qquad (2)$$

c) Leid af dat de totaal-impulsmoment toestand $|2,1\rangle S, M$ als volgt gerelateerd is aan direct-product toestanden:

$$|2,1\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle_{m_1,m_2} + |0,1\rangle_{m_1,m_2}\right). \qquad (3)$$

De relaties van de overige drie toestanden van het quintuplet met direct-product toestanden kunnen op analoge manier afgeleid worden. Er blijkt te gelden (dit hoeft u *niet* af te leiden):

$$|2,0\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|-1,1\rangle_{m_1,m_2} + 2|0,0\rangle_{m_1,m_2} + |1,-1\rangle_{m_1,m_2}\right); \qquad (4)$$

$$|2,-1\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,-1\rangle_{m_1,m_2} + |-1,0\rangle_{m_1,m_2}\right); \qquad (5)$$

$$|2,-2\rangle_{S,M} = |-1,-1\rangle_{m_1,m_2}. \tag{6}$$

Voor de toestanden van het triplet blijkt te gelden (ook dit hoeft u *niet* af te leiden):

$$|1,1\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1,0\rangle_{m_1,m_2} - |0,1\rangle_{m_1,m_2}\right); \tag{7}$$

$$|1,0\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1,1\rangle_{m_1,m_2} - |1,-1\rangle_{m_1,m_2}\right); \tag{8}$$

$$|1,-1\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,-1\rangle_{m_1,m_2} - |-1,0\rangle_{m_1,m_2}\right); \tag{9}$$

a) Toon tenslotte aan dat het singlet als volgt gerelateerd is aan direct-product toestanden (op een vrij te kiezen fasefactor na):

$$|0,0\rangle_{S,M} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|-1,1\rangle_{m_1,m_2} - |0,0\rangle_{m_1,m_2} + |1,-1\rangle_{m_1,m_2}\right); \tag{10}$$

Bij het volgende onderdeel mag u zonder bewijs gebruik maken van (2) t/m (10).

a) Veronderstel dat het systeem van de twee spin-1 deeltjes zich op een gegeven moment bevindt in de toestand:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle_{m_1,m_2} - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle_{m_1,m_2}.$$

Bepaal voor dat moment de verwachtingswaarde van de operator $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$.

Opgave 3. Twee-dimensionale harmonische oscillatoren

(1.5 punten)

Beschouw een *twee*-dimensionale harmonische oscillator met massa m en hoekfrequentie ω. De Hamiltoniaan hiervan wordt gegeven door:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right).$$

Verder definiëren we toestanden $|m,n\rangle$ door:

$$\langle x,y|m,n\rangle = \langle x|m\rangle\langle y|n\rangle,$$

waarbij de toestanden $|m\rangle$ en $|n\rangle$ eigentoestanden zijn van een één-dimensionale harmonische oscillator met massa m en hoekfrequentie ω. De toestand $|m,n\rangle$ is dus in feite het directe product van de eigentoestand bij eigenwaarde $\hbar\omega(m+\frac{1}{2})$ van een één-dimensionale harmonische oscillator in de x-richting en de eigentoestand bij eigenwaarde $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ van een één-dimensionale harmonische oscillator in de y-richting.

De toestanden $|m,n\rangle$ vormen een volledige set van eigentoestanden van H. De bijbehorende eigenwaarden zijn: $\hbar\omega(m+n+1)$.

We beschouwen nu een systeem van *twee* niet-wisselwerkende twee-dimensionale harmonische oscillatoren. De Hamiltoniaan van dit systeem is (in een voor de hand liggende notatie):

$$\begin{array}{rcl} H_{\text{sys}} & = & H_1 + H_2, \text{ met} \\ H_i & = & \frac{1}{2m}(\hat{p}_{i,x}^2 + \hat{p}_{i,y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2). \end{array}$$

Bepaal voor de volgende gevallen de laagste *drie* energieniveaus van H_{sys}. Bepaal ook steeds de ontaardingsgraad en een basis van de eigenruimte.

a) De twee oscillatoren zijn onderscheidbare spin-0 deeltjes.

b) De twee oscillatoren zijn identieke spin-0 deeltjes.

Opgave 4. De Schrödingervergelijking en Galilei-transformaties

(3 punten)

Volgens het klassieke relativiteitsprincipe moet een fysische theorie invariant zijn onder Galilei-transformaties. In deze opgave zullen we zien dat dit geldt voor de quantummechanica. Daartoe moeten we eerst nagaan hoe het relativiteitsprincipe quantummechanisch geïmplementeerd moet worden.

Een Galilei-transformatie beschrijft de relatie tussen twee inertiaalstelsels. Laat S en $'$ twee inertiaalstelsels zijn, zodanig dat S' met snelheid v ten opzichte van S beweegt. Gemakshalve nemen we aan dat de klokken in beide stelsels gelijk lopen ($t' = t$), en dat op $t = t' = 0$ de posities $x = 0$ en $x' = 0$ samenvallen. Wanneer een voorwerp op tijdstip t in S de positie x inneemt, geldt voor de positie x' van het voorwerp in S':

$$x' = x - vt \tag{11}$$

Wanneer volgens een waarnemer in S een voorwerp ten tijde t in positie x een potentiaal ter grootte $V(x,t)$ voelt, is het volgens een waarnemer in S' dus zo dat het voorwerp ten tijde t een potentiaal van die waarde voelt in positie $x' = x - vt$. Wanneer we V' de potentiaal volgens S' noemen, geldt dus: $V'(x - vt, t) = V(x,t)$, of ook:

$$V'(x', t') = V(x' + vt, t). \tag{12}$$

Een volgende vraag is hoe, als volgens een waarnemer in S een deeltje beschreven wordt door een golffunctie ψ en volgens een waarnemer in S' door een golffunctie ψ', de golffuncties ψ en ψ' aan elkaar gerelateerd zijn. Opdat het relativiteitsprincipe quantummechanisch geldt, moet het zo zijn dat de theorie die het quantummechanisch gedrag van het deeltje bepaalt in stelsel S van dezelfde vorm is als in stelsel S'. De vraag is dus of de golffuncties ψ en ψ' zo aan elkaar te relateren zijn, dat indien ψ voldoet aan de Schrödingervergelijking in S:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x,t)\psi(x,t),$$

dat dan ψ' voldoet aan de corresponderende Schrödervergelijking in S':

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}(x',t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}(x',t) + V'(x',t)\psi'(x',t),$$

Dit blijkt inderdaad mogelijk te zijn, en wel alleen maar indien ψ en ψ' als volgt aan elkaar gerelateerd zijn (op een irrelevante constante na):

$$\psi'(x',t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(mvx' + \frac{1}{2}mv^2 t)}\psi(x' + vt, t). \tag{13}$$

Quantummechanisch wordt de relatie tussen twee inertiaalstelsels dus beschreven door een Galilei-transformatie $\{x, V, \psi\} \to \{x', V', \psi'\}$, met x', V' en ψ' gegeven door (11), (12) resp. (13). Onder zo'n transformatie is de quantummechanica invariant.

a) Toon aan dat onder de Galilei-transformatie $\{x, V, \psi\} \to \{x', V', \psi'\}$ de Schrödervergelijking in S inderdaad overgaat in de Schrödervergelijking in S'.

   Let op: U hoeft slechts te laten zien *dat* dit het geval is als ψ transformeert volgens (13), en dus *niet* dat het *alleen maar* het geval is als ψ transformeert volgens (13).

In de rest van deze opgave gaan we na dat de Galilei-transformatie $\{x, V, \psi\} \to \{x', V', \psi'\}$, ondanks het niet-triviale karakter van met name de transformatie
psi $\to \psi'$, toch tot resultaten leidt die we fysisch intuïtief verwachten voor de relatie tussen een beschrijving binnen stelsel S'.

We beginnen met een onderzoek naar hoe de waarschijnlijkheidsdichtheid ρ en de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid j transformeren onder een Galilei-transformatie. In S zijn deze grootheden als volgt gedefinieerd (en in S' gelden soortgelijke definities):

$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= |\psi(x,t)|^2;\\ j(x,t) &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) - \psi(x,t)\frac{\partial\psi^*}{\partial x}(x,t)\right).\end{aligned}$$

Door gebruik te maken van (13) volgt vrij eenvoudig dat de waarschijnlijkheidsdichtheden en waarschijnlijkheidsstroomdichtheden in de twee stelsels als volgt aan elkaar gerelateerd zijn:

$$\rho'(x', t) = \rho(x' + vt, t); \tag{14}$$

$$j'(x', t) = j(x' + vt, t) - v\rho(x' + vt, t). \tag{15}$$

b) Bespreek of de relaties (14) en (15) overeenstemmen met uw fysische intuïtie.

Tenslotte beschouwen we het geval dat we te maken hebben met een vrij deeltje ($v \equiv 0$). Een oplossing van de Schrödingervergelijking in S wordt dan gegeven door de vlakke golf:

$$\psi(x, t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)}.$$

c) Tot welke golffunctie ψ' in S' transformeert ψ onder een Galilei-transformatie? Bespreek weer of het resultaat in overeenstemming is met uw fysische intuïtie.