Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2009-2010 gegeven door Dr. I. Weiss.

Wat is Wiskunde? A (WISB101)
2 november 2009

Elk van de vijf opgaven telt voor 20 punten. Geef niet alleen eindantwoorden, maar laat ook duidelijk zien hoe je tot je antwoord komt. Gebruik van een computer, rekenmachine, aantekeningen of boeken tijdens dit tentamen is niet toegestaan

Opgave 1

Bewijs dat de beweringen
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (R \wedge Q)$ en $(P \wedge Q \wedge (\sim R)) \Leftrightarrow ((\sim R) \vee (\sim Q))$
logisch equivalent zijn.

Opgave 2

Bewijs met inductie dat voor elk geheel getal $n > 0$ geldt

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Opgave 3

a) Bewijs dat voor elk drietal verzamelingen A, B, C geldt

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

b) Bewijs dat de gelijkheid $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ niet hoeft te gelden voor elk viertal verzamelingen A, B, C, D.

Opgave 4

a) Neem op de verzameling $\mathbb{Z}$ van de gehele getallen de relatie R gegeven door: voor $x, y \in \mathbb{Z}$ geldt xRy precies dan als 2 of 3 een deler is van $x + y$.
Bewijs dat R niet een equivalentie relatie is.

b) We beschouwen op de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen de relatie S gegeven door: voor $x, y \in \mathbb{R}$ geldt xSy precies dan als $x^2 = y^2$.
Bewijs dat S een equivalentie relatie is.

c) Neem dezelfde relatie S als in (2). Bepaal voor iedere $a \in \mathbb{R}$ welke reële getallen tot de equivalentie klasse $[a]$ behoren en geef aan hoeveel elementen er in $[a]$ zitten.

Opgave 5

Geef voor elk van de onderstaande beweringen aan of hij juist of onjuist is. Geef een kort argument ter ondersteuning van je antwoord.

a) Als R een equivalentie relatie op een verzameling A is en voor iedere $a \in A$ de equivalentie klasse $[a]$ slechts eindig veel elementen bevat, dan moet de verzameling A eindig zijn.

b) Als x, y, z reële getallen zijn zodat $x \cdot y \cdot z$ irrationaal is, dan is minstens een van de getallen x, y, z irrationaal.

c) Het getal $\sqrt{600}$ is irrationaal.