Wat is Wiskunde Retake B, 15/03/2010, English

Voor de Nederlandse tekst van dit tentamen zie ommezijde.

- On each sheet of paper you hand in write your name and student number
- Each problem counts for 20 points, leading to a maximum of 100 points
- Do not provide just final answers. Prove and motivate your arguments!
- The use of computer, calculator, lecture notes, or books is not allowed

Problem A) Consider the real valued function $f(x) = \frac{2}{x^2-3x-10}$ and let $A \subseteq \mathbb{R}$ be the largest set on which the function is well-defined.

(1) Find the set A. Prove that f is not injective.
(2) Let B be the image of f. Find B.
(3) Find a subset A' of A such that $f|_{A'}$ (the restriction of f to A') is injective. Determine the image $C = Im(f|_{A'})$ and calculate the inverse of $f|_{A'}$ on C.

Problem B)

(1) State (without proof) the Schroeder-Bernstein Theorem.
(2) Consider the two subsets of $\mathbb{R}^2$: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ and $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$. Prove that $|C| = |S|$.
(3) Let L be the set of all straight lines in $\mathbb{R}^2$. Prove that $|L| \geq |[0, 2\pi)|$.

Problem C)

(1) Let $d = gcd(512, 2010)$. Use the Euclidean Algorithm to find d and write d as $x \cdot 512 + y \cdot 2010$ where x and y are integers.
(2) Let a, b be two positive natural numbers and such that $gcd(a^2, b^2) = 1$. Prove that $gcd(a, b) = 1$.

Problem D) Recall that for each non-empty set A there is the group $Symm(A) = \{f : A \to A \mid f \ \ is \ \ bijective\}$ where the group operation $\star$ is composition of functions and the unit element e is the identity function $id : A \to A$.

(1) Write the multiplication table of $Symm(\{1\})$ and $Symm(\{1, 2\})$.
(2) Find two different elements $f, g \in Symm(\{1, 2, 3\})$ such that $f \star f = g \star g = e$ and $f \star g \neq g \star f$.
(3) Prove that $Symm(A)$ is abelian if, and only if, $|A| = 1$ or $|A| = 2$.

Problem E) For each of the following statements decide if it is true or false. Give a short argument to support your answer.

(1) Let A be a set and $f : A \to A$ and $g : A \to A$ be functions. If $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ then $f \circ f = g \circ g$.
(2) There exists a set X and $Y \subseteq X$ such that $Y \neq X$ and $|X \times X| = |Y|$.
(3) Let a, b, c be positive natural numbers. If $gcd(a, b) = 1$ and $gcd(b, c) = 1$ then $gcd(a, c) = 1$.
(4) Let G be a group with binary operation $\star$ and unit e. The set $H = \{g \in G \mid g = g^{-1}\}$ is a subgroup of G.

Wat is Wiskunde Herkansen B, 15/03/2010, Nederlands

For the English text of this exam see the back of this page.

- Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Elk van de vijf opgaven telt voor 20 punten.
- Geef niet alleen eindantwoorden, maar laat ook duidelijk zien hoe je tot je antwoord komt.
- Gebruik van een computer, rekenmachine, aantekeningen of boeken tijdens dit tentamen is niet toegestaan

Opgave A) Beschouw de reëelwaardige functie $f(x) = \frac{2}{x^2-3x-10}$ en zij $A \subset \mathbb{R}$ de grootste verzameling waarop de functie f goed gedefinieerd is.

(1) Bepaal A. Bewijs dat f niet injectief is.
(2) Zij B het bereik van f. Bepaal B.
(3) Vind een deelverzameling A' van A zo dat $f|_{A'}$ (de beperking van f naar A') injectief is. Bereken het bereik C van $f|_{A'}$ en bereken de inverse van $f|_{A'}$ op C.

Opgave B)

(1) Schrijf de stelling van Schroeder–Bernstein op. (Zonder bewijs.)
(2) Beschouw de deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$. Bewijs dat $|C| = |S|$.
(3) Zij L de verzameling van alle rechte lijnen in $\mathbb{R}^2$. Bewijs dat $|L| \geq |[0, 2\pi)|$.

Opgave C)

(1) Zij $d = ggd(512, 2010)$. Bepaal d met behulp van het Euclidisch Algoritme en schrijf d in de vorm $x \cdot 512 + y \cdot 2010$ met x en y gehele getallen.
(2) Gegeven zijn twee positieve gehele getallen a en b met de eigenschap dat $ggd(a^2, b^2) = 1$. Bewijs dat $ggd(a, b) = 1$.

Opgave D) Herinnering: voor een niet lege verzameling A, is de verzameling $Symm(A) = \{f : A \to A \mid f \textit{ is bijectief}\}$ een groep met bewerking $\star$ de samenstelling van functies en eenheidselement e the identiteitsfunctie $id : A \to A$.

(1) Schrijf de vermenigvuldiginstabel van $Symm(\{1\})$ en van $Symm(\{1,2\})$ op.
(2) Vind twee verschillende elementen $f, g \in Symm(\{1,2,3\})$ zo dat $f \star f = g \star g = e$ en $f \star g \neq g \star f$.
(3) Bewijs dat $Symm(A)$ een abelse groep is precies dan als $|A| = 1$ of $|A| = 2$.

Opgave E) Zijn de volgende uitspraken waar of onwaar? Geef voor elk van je antwoorden een kort argument.

(1) Zij A een verzameling en laten $f\colon A \to A$ en $g\colon A \to A$ functies zijn. Als $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ dan geldt $f \circ f = g \circ g$.
(2) Er bestaat een verzameling X en $Y \subseteq X$ met $Y \neq X$ en $|X \times X| = |Y|$.
(3) Gegeven zijn gehele getallen a, b, c. Als $ggd(a,b) = 1$ en $ggd(b,c) = 1$ dan geldt $ggd(a,c) = 1$.
(4) Zij G een groep met bewerking $\star$ en eenheidselement e. De verzameling $H = \{g \in G \mid g = g^{-1}\}$ is een ondergroep van G.