Wat is Wiskunde Retake Exam A, 3/01/2011, English

Voor de Nederlandse tekst van dit tentamen zie ommezijde.

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper.
- Write your name and student number on each sheet of paper you hand in.
- Each problem counts for 20 points, leading to a maximum of 100 points.
- Do not provide just final answers. Prove and motivate your arguments!
- The use of computer, calculator, lecture notes, or books is not allowed. A personal A4 is allowed.

Problem A) (new sheet!) Prove that the statements

$$(P \Rightarrow ((\sim Q) \vee (\sim R))) \Leftrightarrow ((\sim R) \wedge Q)$$
$$(P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow (R \vee (\sim Q))$$

are logically equivalent.

Problem B) (new sheet!) The Fibonacci sequence $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ is defined recursively as follows: $F_1 = F_2 = 1$ and for $n > 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Prove by induction that for every integer $n \geq 2$

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

Problem C) (new sheet!)

(1) Prove that for every two sets A and B the following equality holds:
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

(2) Given is a set X with the property that $X \cap A = X \cap B$ for every two sets A and B. Find X (and prove your answer!).

Problem D) (new sheet!) For each of the following statements decide if it is true or false. Give a short argument to support your answer.

(1) If X is a set and R is an equivalence relation on X such that X has 101 equivalence classes then X must have at least 101 elements.

(2) The sum of two irrational numbers is always irrational.

(3) For any three sets A, B and C holds that $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Problem E) (new sheet!)

(1) Consider the set $\mathbb{Z}$ of integers and the relation R given by: aRb precisely when $a - b$ divides $a + b$. Prove that R is not an equivalence relation.

(2) Consider the set $X = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ and the relation S given on it by $(a, b, c)S(x, y, z)$ precisely when 2 divides $a - x$. Prove that S is an equivalence relation.

(3) Consider the equivalence relation S from (2). Give an explicit description of all equivalence classes. Indicate clearly how many equivalence classes are there.

Wat is Wiskunde Hertentamen A, 03/01/2011, Nederlands

For the English text, see the other side of this paper.

- Schrijf je antwoord voor elk probleem op een apart vel.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel wat je inlevert.
- Elk probleem telt voor 20 punten, wat een totaal van 100 punten kan opleveren.
- Schrijf niet alleen eindantwoorden op. Bewijs en motiveer je argumenten!
- Het gebruik van computer, rekenmachine, college aantekeningen of boeken is niet toegestaan. Een persoonlijk A4-tje is toegestaan

Probleem A) (nieuw vel!) Bewijs dat de uitspraken

$$(P \Rightarrow ((\sim Q) \vee (\sim R))) \Leftrightarrow ((\sim R) \wedge Q)$$

$$(P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow (R \vee (\sim Q))$$

logisch equivalent zijn.

Probleem B) (nieuw vel!) De rij van Fibonacci $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ is recursief gedefiniëerd, op de volgende manier: $F_1 = F_2 = 1$ en voor $n > 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bewijs met inductie dat voor elk geheel getal $n \geq 2$

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

Probleem C) (nieuw vel!)

(1) Bewijs dat voor elke drietal verzamelingen A,B en C de volgende gelijkheid geldt:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

(2) Gegeven is een verzameling X met de eigenschap dat $X \cap A = X \cap B$ voor elke twee verzamelingen A en B. Vind X (en bewijs je antwoord!).

Probleem D) (nieuw vel!) Geef voor elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet. Geef een kort argument om je antwoord te ondersteunen.

(1) Als X een verzameling is en R een equivalentierelatie op X zodanig dat X 101 equivalentieklassen heeft, dan moet X tenminste 101 elementen bevatten.

(2) De som van twee irrationale getallen is altijd irrationaal.

(3) Voor elke drie verzamelingen A, B en C geldt dat $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Probleem E) (nieuw vel!)

(1) Beschouw de verzameling van gehele getallen $\mathbb{Z}$ en de relatie R gegeven door: aRb precies dan als $a - b$ een deler is van $a + b$. Bewijs dat R geen equivalentierelatie is.

(2) Beschouw de verzameling $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en de relatie S op X gegeven door $(a, b, c)S(x, y, z)$ precies dan als 2 $a - x$ deelt. Bewijs dat S een equivalentierelatie is.

(3) Beschouw de equivalentierelatie S uit (2). Geef een explicite omschrijving van alle equivalentieklassen. Hoeveel equivalentieklassen zijn er ?