WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday November 7, 2011, 13.30 – 16.30 uur

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper. On each (separate) sheet you should write your name and student number.
- The grade points are equally distributed among the exercises.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to the usual laws for logical operations and about sets (such as de Morgan) without proof, but any other claim should be deduced from scratch. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. (**new sheet of paper**) (a) Give a truth table for the following statement: $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((\sim P \wedge Q) \wedge \sim (P \vee R))$.

   (b) Is the statement $((P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ a tautology? Prove your answer!

2. (**new sheet of paper**) Let $n \in \mathbb{Z}$. Prove that n is odd if and only if $3n^3 + 5n^2 + n + 1$ is even.

3. (**new sheet of paper**) Let A, B and C be sets. Prove or disprove the following identities:

   (a) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$,
   (b) $\overline{A - (B \cup C)} = \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$.

4. (**new sheet of paper**) Let x_n be the sequence that is given by $x_0 = 4$, $x_1 = 5$ and $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ if $n \geq 2$. Prove, using the strong principle of mathematical induction, that $x_n = 3 + 2^n$ for all non-negative integers n.

5. (**new sheet of paper**) (a) Prove that

   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \text{ is an integer}\}$$

   is an equivalence relation on $\mathbb{R}$.

   (b) Describe all distinct equivalence classes of R, i.e., give a set of real numbers whose R-equivalence classes are mutually disjoint, such that every real number is equivalent to an elements of that set (and prove your claims).

6. (**new sheet of paper**) Let R be a relation on $A \times A$, define a new relation R^{-1} as follows:

   $$R^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \,:\, (b, a) \in R\}\,.$$

   (a) Prove that both $R \cap R^{-1}$ and $R \cup R^{-1}$ are symmetric.

   (b) Prove that R is transitive if and only if R^{-1} is transitive.

WAT IS WISKUNDE (English version see other side)
Maandag 7 november 2011, 13.30 – 16.30 uur

- Gebruik voor iedere opgave een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag verwijzen naar de gebruikelijke wetten voor logische operaties en over verzamelingen (zoals de Morgan) zonder bewijs, maar iedere andere bewering moet uit basisprincipes worden afgeleid. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. (**nieuw vel papier**) (a) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering: $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((\sim P \wedge Q) \wedge \sim (P \vee R))$.

   (b) Is de bewering $((P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ een tautologie? Bewijs je antwoord!

2. (**nieuw vel papier**) Laat $n \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat n oneven is dan en slechts dan als $3n^3 + 5n^2 + n + 1$ even is.

3. (**nieuw vel papier**) A, B en C zijn verzamelingen. Bewijs of weerleg de volgende gelijkheden:

   (a) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$,

   (b) $\overline{A - (B \cup C)} = \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$.

4. (**nieuw vel papier**) Laat x_n de rij zijn die gegeven wordt door $x_0 = 4$, $x_1 = 5$ en $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ voor $n \geq 2$. Bewijs met het sterke principe van volledige inductie dat $x_n = 3 + 2^n$ voor elk niet-negatief geheel getal n.

5. (**nieuw vel papier**) (a) Bewijs dat

   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \text{ is een geheel getal}\}$$

   een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}$.

   (b) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R, d.w.z. geef een verzameling van reële getallen waarvan de R-equivalentieklassen disjunct zijn, zodat ieder reëel getal equivalent is met een element uit die verzameling (en bewijs je beweringen).

6. (**nieuw vel papier**) Laat R een relatie zijn op $A \times A$, definiëer een nieuwe relatie R^{-1} als volgt:

   $$R^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \,:\, (b, a) \in R\}\,.$$

   (a) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ en $R \cup R^{-1}$ symmetrisch zijn.

   (b) Bewijs: R is transitief precies als R^{-1} transitief is.