Uitwerking tentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

7 november 2011

(1a) We noemen de gehele uitdrukking ϕ. Dan krijgen we de volgende tabel:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$\sim P \wedge Q$	$\sim (P \vee R)$	$(\sim P \wedge Q) \wedge \sim (P \vee R)$	ϕ
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1

(1b) Het is mogelijk om hier wederom een waarheidstabel te maken om te concluderen dat de uitspraak altijd waar is of niet. Het is echter ook mogelijk om dit te beredeneren zonder alles uit te schrijven.

De uitdrukking $(R \wedge \sim R)$ is altijd onwaar; een uitspraak kan niet waar en onwaar tegelijk zijn. Daaruit volgt dat de uitdrukking $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)$ waar is dan en slechts dan wanneer $(P \wedge \sim Q)$ onwaar is, dus als $\sim (P \wedge \sim Q)$ waar is. Via De Morgan weten we dat $\sim (P \wedge \sim Q)$ equivalent is met $\sim P \vee Q$. We weten ook dat $\sim P \vee Q$ equivalent is met $P \Rightarrow Q$. Dus de uitspraak waarvan we moesten laten zien if het een tautologie was, kan worden omgeschreven naar de equivalente uitspraak $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$. En deze uitspraak is duidelijk altijd waar, dus het is een tautologie, waarmee ook bewezen is dat de originele uitspraak een tautologie is.

(2) Stel dat n oneven is, dan kan je n dus schrijven als $2k+1$, met $k \in \mathbb{Z}$. Dit geeft dat

$$3n^3+5n^2+n+1 = 3(2k+1)^3+5(2k+1)^2+2k+1+1 = 3(8k^3+12k^2+6k+1)+5(4k^2+4k+1)+2k+2 =$$

$$24k^3+36k^2+18k+3+20k^2+20k+5+2k+2 = 24k^3+56k^2+38k+10 = 2(12k^3+28k^2+19k+5)$$

Dus er geldt dat $3n^3+5n^2+n+1$ geschreven kan worden als $2l$ met $l = 12k^3+28k^2+19k+5$. Dus $3n^3+5n^2+n+1$ is even als n oneven is.

Voor de bewering de andere kant op gebruiken we een contrapositief bewijs. Stel dus dat n even is, dan kan n geschreven worden als $2k$ met $k \in \mathbb{Z}$. Dit geeft dan dat:

$$3n^3+5n^2+n+1 = 3(2k)^3+5(2k)^2+2k+1 = 3(8k^3)+5(4k^2)+2k+1 = 24k^3+20k^2+2k+1 =$$

$$2(12k^3+10k^2+k)+1$$

Dus er geldt nu dat $3n^3+5n^2+n+1$ geschreven kan worden als $2l+1$ met $l = 12k^3+10k^2+k$. Dus $3n^3+5n^2+n+1$ is oneven als n even is. Dit bewijst de uitspraak beide kanten op.

(3a) Deze uitspraak is waar. Dit bewijzen we als volgt: eerst bewijzen we dat $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$, en daarna $(A \cup B) - (A \cap B) \supseteq (A - B) \cup (B - A)$.

Merk eerst op dat het mogelijk is dat $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$. In dat geval geldt trivialerwijs dat $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$. Dus stel dat $(A \cup B) - (A \cap B) \neq \emptyset$. Dan kiezen we een element $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Voor deze x geldt dus dat $x \in A \vee x \in B$ en $\sim (x \in A \wedge x \in B)$. Neem nu zonder verlies van algmeenheid aan dat $x \in A$. In dat geval geldt dus dat $x \notin B$. Dus $x \in A - B$ en dus geldt ook dat $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Voor $x \in B$ geldt een gelijk argument. Dus dit bewijst $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A)$.

Dan nu de andere uitspraak. Ook nu geldt dat $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ een triviaal geval is. Dus stel dat $(A - B) \cup (B - A)$ niet leeg is. Dan kiezen we nu een $y \in (A - B) \cup (B - A)$. We mogen nu zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $y \in A - B$. Dat betekent dus dat $y \in A$ en $y \notin B$. Daaruit volgt dus in het bijzonder dat $y \in A \cup B$ en ook dat $y \notin A \cap B$. Dus er geldt dat $y \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Voor $y \in B - A$ geldt een gelijk argument. Dus hieruit volgt dat $(A \cup B) - (A \cap B) \supseteq (A - B) \cup (B - A)$.

Dit bewijst dus dat $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

(3b) Deze uitspraak ook waar. We gaan op dezelfde manier als hierboven te werk.

Hier (en ook bij het deel hieronder) geldt dat we mogen aannemen dat de verzamelingen niet leeg zijn. Dus kies nu een $x \in \overline{A - (B \cup C)}$. Dan geldt dus $x \notin A - (B \cup C)$. Dit kan twee dingen betekenen: $x \notin A$ of $x \in B \cup C$ (eventueel allebei). Stel $x \notin A$. Dan geldt in het bijzonder dat $x \notin A - B$ dus $x \in \overline{(A - B)}$ dus geldt ook dat $x \in \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$. Stel nu dat $x \in B \cup C$. We nemen nu zonder verlies van algemeenheid aan dat $x \in B$. In dat geval geldt dat $x \notin A - B$, dus $x \in \overline{(A - B)}$ en dus ook $x \in \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$. Voor $x \in C$ geldt een gelijk bewijs. Dus zo volgt dat $\overline{A - (B \cup C)} \subseteq \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$.

Dan nu de omgekeerde uitspraak. Stel dat $y \in \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$. We kunnen nu zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $y \in \overline{(A - B)}$. In dat geval geldt dat $y \notin A - B$. Dit kan ook weer twee dingen betekenen: $y \notin A$ of $y \in B$ (of allebei). Stel dat $y \notin A$, dan geldt dat $y \notin A - (B \cup C)$ en dus geldt dat $y \in \overline{A - (B \cup C)}$. Als $y \in B$ dan geldt ook dat $y \in B \cup C$. Dus er geldt bovendien dat $y \notin A - (B \cup C)$ en dus geldt er ook dat $y \in \overline{A - (B \cup C)}$. Voor $y \in \overline{(A - C)}$ geldt een gelijk bewijs. Dus zo volgt dat $\overline{A - (B \cup C)} \supseteq \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$.

Hiermee is bewezen dat $\overline{A - (B \cup C)} = \overline{(A - B)} \cup \overline{(A - C)}$

(4) We bewijzen eerst de inductiebasis. Er geldt dat $x_0 = 3 + 2^0 = 3 + 1 = 4$ en $x_1 = 3 + 2^1 = 3 + 2 = 5$. Dus de directe formule geldt voor x_0 en x_1.

Dan nu de inductiestap. Zij nu de directe formule gegeven voor alle natuurlijke getallen kleiner dan een gegeven $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 2$. Dan moet er nu bewezen worden dat de formule ook geldt voor n zelf. Aangezien $n - 1 < n$, weten we dat $x_{n-1} = 3 + 2^{n-1}$. En aangezien $n - 2 < n$, weten we ook dat $x_{n-2} = 3 + 2^{n-2}$. Daaruit kunnen we het volgende afleiden:

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} = 3(3 + 2^{n-1}) - 2(3 + 2^{n-2}) = 9 + 3 \cdot 2^{n-1} - 6 - 2^{n-1} =$$

$$3 + 2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-1} = 3 + 2 \cdot 2^{n-1} = 3 + 2^n$$

Dus de formule geldt ook voor x_n, dus daaruit volgt de inductiestap. Dus nu is met het principe van sterke inductie bewezen dat de formule geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(5a) We gaan de drie kenmerken van een equivalentierelatie af:

Er geldt dat $(a, a) \in R$ voor alle $a \in \mathbb{R}$. Er geldt immers dat $a - a = 0$, en $0 \in \mathbb{Z}$. Dus dan geldt dat $(a, a) \in R$. Dus de relatie is reflexief.

Stel dat $(a, b) \in R$. Dan geldt dus dat $a - b = s$, met $s \in \mathbb{Z}$. Nu geldt dus duidelijk dat $b-a = -s$. En aangezien $-s \in \mathbb{Z}$, geldt dus ook dat $(b, a) \in R$. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel dat $(a, b) \in R$ en $(b, c) \in R$. Dan geldt dus dat $a - b = s$ en $b - c = t$ met $s, t \in \mathbb{Z}$. Nu geldt dat $(a - b) + (b - c) = s + t$ dus hieruit volgt dat $a - b + b - c = a - c = s + t$. En aangezien $s + t \in \mathbb{Z}$, geldt dus dat $(a, c) \in R$. Dus de relatie is transitief.

Daarmee is bewezen dat R een equivalentierelatie is.

(5b) De gevraagde verzameling reële getallen is het interval [0,1). We zullen laten zien dat dit interval voldoet.

Eerst laten we zien dat de equivalentieklasses van alle punten in het interval disjunct zijn. Kies nu twee punten x en y uit het interval. Er geldt nu dat $|x - y| < 1$. Dit betekent dat de enige mogelijkheid om ervoor te zorgen dat het verschil tussen x en y een geheel getal is, is door te kiezen dat $|x - y| = 0$ en dit geeft dus $x = y$. Dus x en y zitten in dezelfde equivalentieklasse dan en slechts dan als ze hetzelfde zijn.

Er volgt ook vrij eenvoudig dat ieder reëel getal equivalent is met een getal uit dit interval. Zij een willekeurig reëel getal r gegeven. Bekijk nu $s = r - \lfloor r \rfloor$. Dan weten we dat $s \in [0, 1)$ en ook dat $r - s = r - (r - \lfloor r \rfloor) = \lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$. Dus $(r, s) \in R$.

Hiermee is het gevraagde bewezen.

(6a) Merk eerst op dat het mogelijk is dat R en R^{-1} lege relaties zijn. In dat geval zijn ze zeker ook symmetrisch en transistief. Dus we nemen vanaf hier aan dat ze niet leeg zijn.

We bewijzen eerst dat $R \cup R^{-1}$ symmetrisch is. Stel dat $(a, b) \in R \cup R^{-1}$. We nemen nu zonder verlies van algemeenheid aan dat $(a, b) \in R^{-1}$. Er geldt dat $(a, b) \in R^{-1}$ dan en slechts dan zo is wanneer $(b, a) \in R$. Dus dan geldt ook dat $(b, a) \in R \cup R^{-1}$. Dus dat betekent dat $(a, b) \in R \cup R^{-1} \Rightarrow (b, a) R \cup R^{-1}$. De andere kant op wordt op een vergelijkbare manier bewezen. Dus $R \cup R^{-1}$ is symmetrisch.

Nu het bewijs dat $R \cap R^{-1}$ symmetrisch is. Stel $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Dan geldt dus in het bijzonder dat $(a, b) \in R$, dus $(b, a) \in R^{-1}$. Uit $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ volgt ook dat $(a, b) \in R^{-1}$, dus ook $(b, a) \in R$. Dus er geldt dat $(b, a) \in R$ en $(b, a) \in R^{-1}$. Dus er geldt ook dat $(b, a) \in R \cap R^{-1}$. Dus de relatie $R \cap R^{-1}$ is symmetrisch.

(6b) Stel eerst dat de relatie R transistief is. Dit betekent dus dat voor (a, b) en (b, c) in R geldt dat $(a, c) \in R$. Zij nu dan (s, t) en (t, u) in R^{-1} gegeven. Dit betekent dat $(t, s) \in R$ en $(u, t) \in R$. Uit de transitiviteit van R volgt nu dat $(u, s) \in R$ en zo volgt dus ook dat $(s, u) \in R^{-1}$. Dus R^{-1} is transitief. Het bewijs de andere kant op is gelijk.