WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
January 4, 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Write your name and student number on each separate sheet that you use.
- The grade points are equally distributed among the exercises.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to the usual laws for logical operations and about sets (such as de Morgan) without proof, but any other claim should be deduced from scratch. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. (a) Give a truth table for the following statement:

$$(P \vee (Q \Leftrightarrow R)) \vee (((\sim R) \vee P) \vee (P \Leftrightarrow (\sim R))).$$

   (b) Is the statement $((P \vee ((\sim Q) \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee (\sim Q)) \wedge (P \vee R)))$ a tautology? Prove your answer!

2. Let $n, m \in \mathbb{Z}$. Prove that $(m+n)^2$ is odd if and only if m and n have different parity.

3. Let A, B and C be sets. Prove or disprove the following identities:
   (a) $(A \cup B) - (A \cap C) = ((A \cup B) - C)$,
   (b) $\overline{A - (C \cap B)} = \overline{(A - C)} \cup \overline{(A - B)}$.

4. Prove, using the principle of mathematical induction, that $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Prove that

$$R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 = 0\}$$

   is an equivalence relation on $\mathbb{R}^2$.

   (b) Describe all distinct equivalence classes of R, i.e., give a set whose R-equivalence classes are mutually disjoint, such that every element of $\mathbb{R}^2$ is equivalent to an elements of that set (and prove your claims).

6. Let $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ such that $a + b \equiv 0 (\bmod 3)$ and $c \equiv d (\bmod 3)$.

   Prove that $ad + bc \equiv 0 (\bmod 3)$.

WAT IS WISKUNDE (English version see other side)
4 januari 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag verwijzen naar de gebruikelijke wetten voor logische operaties en over verzamelingen (zoals de Morgan) zonder bewijs, maar iedere andere bewering moet uit basisprincipes worden afgeleid. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. (a) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering:

$$(P \vee (Q \Leftrightarrow R)) \vee (((\sim R) \vee P) \vee (P \Leftrightarrow (\sim R))).$$

   (b) Is de bewering $((P \vee ((\sim Q) \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee (\sim Q)) \wedge (P \vee R)))$ een tautologie? Bewijs je antwoord!

2. Laat $n, m \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat $(m+n)^2$ is oneven dan en slechts dan als m en n verschillende pariteit hebben.

3. A, B en C zijn verzamelingen. Bewijs of weerleg de volgende gelijkheden:
   (a) $(A \cup B) - (A \cap C) = ((A \cup B) - C)$,
   (b) $\overline{A - (C \cap B)} = \overline{(A - C)} \cup \overline{(A - B)}$.

4. Bewijs met het principe van volledige inductie dat $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Bewijs dat

$$R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 = 0\}$$

   een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}^2$.

   (b) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R, d.w.z. geef een verzameling waarvan de R-equivalentieklassen disjunct zijn, zodat ieder element van $\mathbb{R}^2$ equivalent is met een element uit die verzameling (en bewijs je beweringen).

6. Laat $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ zodat $a + b \equiv 0(\bmod 3)$ en $c \equiv d(\bmod 3)$.

   Bewijs dat $ad + bc \equiv 0(\bmod 3)$.