Uitwerking tentamen 'Wat is Wiskunde'

Sven Bosman

16 Januari 2012

(1) We zullen eerst bewijzen dat f injectief is. Stel daarvoor dat x en y twee elementen van $\mathbb{R} - \{5\}$ zijn, en stel dat $f(x) = f(y)$. Dan moet gelden dat $\frac{2x}{x-5} = \frac{2y}{y-5}$, dus $2x(y-5) = 2y(x-5)$. Beide kanten door 2 delen en de haakjes wegwerken geeft $xy - 5x = yx - 5y$, dus als we nu aan beide kanten xy aftrekken dan vinden we $-5x = -5y$, en beide kanten delen door -5 geeft $x = y$. Dus als $f(x) = f(y)$ dan moet gelden dat $x = y$, en dat betekent dat de functie f injectief is.
We gaan nu bewijzen dat f surjectief is. Dus stel dat $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, dan zoeken we een x zodat $\frac{2x}{x-5} = y$. Dus we zoeken een x zodat $2x = y(x-5)$, dus $x(2-y) = -5y$, dus $x = \frac{5y}{y-2}$. Dit is een gedefinieerd getal, omdat $y \neq 2$. En we zien dat inderdaad geld dat

$$f\left(\frac{5y}{y-2}\right) = \frac{\frac{10y}{y-2}}{\frac{5y}{y-2} - 5} = \frac{\frac{10y}{y-2}}{\frac{10}{y-2}} = y$$

Dus de functie f is injectief en surjectief, en dus bijectief.
In het vorige onderdeel hebben we ook meteen de inverse functie $f^{-1}(x)$ gevonden, namelijk $f^{-1}(x) = \frac{5x}{x-2}$. Om te bewijzen dat dit inderdaad de inverse functie is moeten we laten zien dat $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Een van die berekeningen hebben we net al gezien, en de ander is vergelijkbaar. $\square$

(2a) Stel dat we de linker permutatie α noemen en de rechter β. Dan zoeken we dus $\alpha \circ \beta$. Het is het makkelijkst om dit per element te bekijken. Dus $\alpha \circ \beta(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(2) = 3$. Op dezelfde manier vinden we dat $\alpha \circ \beta(2) = \alpha(3) = 1$ en $\alpha \circ \beta(3) = \alpha(4) = 2$, etc. Uiteindelijk vinden we op die manier dat de compositie de volgende permutatie is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\square$

(2b) Stel dat we de gegeven permutatie α noemen, dan zoeken we dus α^{-1}. Dit doen we ook weer element voor element. We willen dat $\alpha(\alpha^{-1}(1)) = 1$, en $\alpha(4) = 1$, dus we willen dat $\alpha^{-1}(1) = 4$. Verder willen we dat $\alpha(\alpha^{-1}(2)) = 2$, dus omdat $\alpha(1) = 2$ willen we dat $\alpha^{-1}(2) = 1$. Op deze manier gaan we door, en vinden we de volgende inverse van de gegeven permutatie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Merk op dat deze aanpak en het gevonden resultaat eens snellere manier lijken te suggereren: namelijk het omdraaien van de twee rijen van de permutatie, en dan de kolommen zo herschikken dat de nieuwe bovenste rij in oplopende volgorde staat. Zoals opgemerkt in het boek (maar niet echt als stelling gegeven en daardoor misschien minder bekend) geeft dit inderdaad de inverse. $\square$

(2c) Laat

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

en laat I de identiteitspermutatie zijn. Dan zien we dat $\alpha^6 = I$. Het gevolg is dat $\alpha^{6-n} = \alpha^6 \circ (\alpha^{-1})^n$, en dit is dus gelijk aan $(\alpha^{-1})^n$. Het is duidelijk dat dit de inverse is van α^n, want $\alpha^n \circ (\alpha^{-1})^n = (\alpha^{-1})^n \circ \alpha^n = I$. En dus geldt dat $(\alpha^n)^{-1} = \alpha^{6-n}$. $\square$

(3a) Het vinden van de grootste gemene deler van twee getallen gebeurt met behulp van het Euclidisch algoritme. Als we 986 door 357 delen vinden we dat $986 = 2 \cdot 357 + 272$. Nu delen we 357 door 272 en vinden $357 = 272 + 85$. Als we 272 door 85 delen vinden we $272 = 3 \cdot 85 + 17$, en omdat $85 = 5 \cdot 17$ volgt dat de grootste gemene deler van 357 en 986 gelijk is aan 17. $\square$

(3b) We volgen bovenstaande berekeningen terug, en vinden:

$$\begin{aligned} 17 &= 272 - 3 \cdot 85 \\ &= 272 - 3 \cdot (357 - 272) \\ &= 4 \cdot 272 - 3 \cdot 357 \\ &= 4 \cdot (986 - 2 \cdot 357) - 3 \cdot 357 \\ &= 4 \cdot 986 - 11 \cdot 357 \end{aligned}$$

Dus $x = -11$ en $y = 4$ voldoet. $\square$

(3c) Stel dat zulke getallen x en y wel bestaan. Dan zien we het volgende:

$$\begin{aligned} 1 &= 6 \cdot 3 - 17 \\ &= 357 \cdot 6x + 986 \cdot 6y - 4 \cdot 986 + 11 \cdot 357 \\ &= (11 + 6x) \cdot 357 + (6y - 4) \cdot 986 \end{aligned}$$

En dus bestaan er dan gehele getallen x' en y' zodat $1 = 357 \cdot x' + 986 \cdot y'$, en dat is alleen mogelijk als de grootste gemene deler van 357 en 986 gelijk is aan 1 (dit is een stelling in het boek). En bij onderdeel a hebben we laten zien dat dit niet het geval is, dus zulke getallen x en y kunnen niet bestaan. $\square$

(4a) Stel k is een willekeurig geheel getal. Dan zien we dat $f_n \circ f_m(k) = f_n(k+m) = k+m+n = f_{n+m}(k)$. En dus $f_n \circ f_m = f_{n+m}$. $\square$

(4b) Om te bewijzen dat $(\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ een groep is moeten we checken dat het aan 4 eisen voldoet. De eerste is dat compositie van twee functies f_n en f_m weer een functie uit deze verzameling oplevert, en dat hebben we al gezien bij onderdeel a. De tweede eis is dat deze compositie associatief is, dus dat $(f_n \circ f_m) \circ f_k = f_n \circ (f_m \circ f_k)$. Maar dit volgt uit het feit dat beide gelijk zijn aan f_{n+m+k}, omdat $n + (m+k) = (n+m) + k$. De derde eis is dat er een identiteitselement is. We zien dat f_0 de functie is die ieder getal k naar $k + 0 = k$ stuurt, dus dit is de identiteitsfunctie. Dus $f_0 \circ f_n = f_n \circ f_0 = f_n$. Dus de functie f_0 fungeert als identiteitselement. Ten slotte moet iedere functie f_n een inverse hebben, en uit onderdeel a volgt dat f_{-n} deze rol heeft. Dus $(\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ voldoet inderdaad aan alle groepsaxioma's. $\square$

(5a) Zo'n bijectie is over het algemeen het makkelijkst te geven met een gevalsonderscheiding, door het element 0 naar 0 te sturen, en bijecties te geven tussen $(0,1)$ en alle positieve elementen uit $\mathbb{R}$, en $(-1,0)$ en alle negatieve elementen uit $\mathbb{R}$. Om een bijectie te maken tussen $(0,1)$ en $\mathbb{R}_{>0}$ moeten we alle elementen uit $\mathbb{R}_{>0}$ bereiken, ook de willekeurig grote elementen. Het voelt dan ook logisch om de functie $1/x$ te gebruiken, die duidelijk injectief is. Deze is echter nog niet surjectief, want het bereik is $(1, \infty)$. Maar dit betekent dat de functie $f : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeven door $f(x) = 1/x - 1$ wel bijectief is. Op dezelfde manier is $1/x + 1$ een bijectie tussen $(-1,0)$ en $\mathbb{R}_{<0}$. Het samenvoegen van deze twee bijecties en het toevoegen van het punt 0 aan zowel het domein als het bereik geeft de gevraagde bijectie tussen $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$. $\square$

(5b) We zien dat $(-1,1) \subset [-1,1] \subset \mathbb{R}$, en dus moet gelden $|(-1,1)| \leq |[-1,1]| \leq |\mathbb{R}|$, en uit onderdeel a volgt nu dat $|\mathbb{R}| \leq |[-1,1]| \leq |\mathbb{R}|$, dus $|\mathbb{R}| = |[-1,1]|$. $\square$

(6a) De grootste gemene deler van 165 en 315 zouden we weer met het Euclidisch algoritme kunnen bepalen, maar deze getallen zijn wat simpeler, dus het is sneller om dat niet te doen. We zien namelijk meteen dat beide getallen deelbaar zijn door 5, en delen door 5 geeft 33 en 63, welke duidelijk allebei deelbaar zijn door 3. Delen door 3 geeft 11 en 21, en de grootste gemene deler van deze twee getallen is duidelijk 1, want 11 is priem en 21 is niet priem en niet deelbaar door 11. Dus de grootste gemene deler is $3 \cdot 5 = 15$. Voor het grootste gemene veelvoud merken we op dat dit deelbaar moet zijn door 11 en 21, de getallen die we net vonden, en daarnaast nog door de grootste gemene deler die we toen al hadden weggedeeld. Dus dit getal moet minstens $11 \cdot 15 \cdot 21 = 3465$ zijn, en een snelle staartdeling (want rekenmachines zijn niet toegestaan) laat zien dat dit getal inderdaad deelbaar is door zowel 165 als 315. Dus 3465 is het kleinste gemene veelvoud. $\square$

(6b) Dit is een kwestie van een snelle berekening, omdat $165 \cdot 315 = 15 \cdot 3465$. $\square$

(6c) Ieder getal is op een unieke wijze te schrijven als een product van priemgetallen (dit is de hoofdstelling van de rekenkunde), en de grootste gemene deler van twee getallen is het product van alle priemgetallen die in allebei die producten voorkomen. Dus stel dat $a = p_1 \cdot ... \cdot p_n \cdot q_1 \cdot ... \cdot q_m$ en $b = p_1 \cdot ... \cdot p_n \cdot r_1 \cdot ... \cdot r_k$ waar de p'tjes, q'tjes en r'etjes allen priemgetallen zijn, en $p_1 \cdot ... \cdot p_n$ de ggd van a en b is. Nu zien we dat $(a \cdot b)/\text{ggd}(a, b)$ een veelvoud is van zowel a als b, door eerst de ggd weg te delen uit a, en daarna niet uit a maar uit b. Stel dat er een kleiner veelvoud van zowel a als b is. Dan kunnen we dus nog een priemgetal wegdelen uit $a \cdot b$. Als dit een priemgetal van de vorm p_i is dan houden we het getal $(a \cdot r_1 \cdot ... \cdot r_k)/p_i$ over, en omdat die p_i niet van de vorm r_j is voor een j, zien we dat dit getal geen veelvoud is van a. Als we echter een getal van de vorm r_i wegdelen houden we geen veelvoud van b over, en van de vorm q_i dan houden we geen veelvoud van a over. Dus er moet gelden dat

$$\frac{a \cdot b}{\text{gcd}(a, b)} = \text{lcm}(a, b)$$