MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB101 WERD IN 2003/2004 GEGEVEN DOOR K.G. DAJANI.

Wat is Wiskunde B (WISB101)
29 januari 2004

Opgave 1

Zij f de reëelwaardige functie gegeven door

$$f(x) = \log(5 - \sqrt{x-4})$$

a) Bepaal het domein en bereik van f.

b) Bewijs dat f injectief is op zijn domein.

c) Bepaal f^{-1}.

Opgave 2

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Laat $A = [1, 3]$ en $B = (-1, 2]$.

a) Bepaal $f^{-1}(f(A))$.

b) Bepaal $f(f^{-1}(B))$.

c) Is f injectief? Surjectief? Motiveer je antwoord!

Opgave 3

We geven met $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ aan, en met $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ de verzameling van *oneindige* deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

a) Verzin een injectieve afbeelding van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ (Hint: gebruik bijvoorbeeld een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$).

b) Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 4

a) Maak de volgende tabel zó af, dat de verzameling $\{a, b, c, d\}$ met de operatie $*$ een groep wordt. Bepaal ook het eenheidselement.

$*$	a	b	c	d
a	d	c		
b		d		
c			d	
d				d

b) Geef een voorbeeld van een verzameling X en een operatie $\circ$ op X die wel commutatief, maar niet associatief is.

Opgave 5

a) Laat $\langle x_n \rangle$ een rijtje in $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs: als $a \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van de verzameling $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is, dan heeft $\langle x_n \rangle$ een deelrij die naar a convergeert.

b) Laat het rijtje $\langle x_n \rangle$ recursief gedefinieerd zijn door

$$x_1 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}$$

Bewijs, dat $\langle x_n \rangle$ convergeert.

Opgave 6

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x - 76}{x - 4} & \text{als } x \neq 4 \\ 17 & \text{als } x = 4 \end{cases}$$

a) Bewijs dat f een limiet heeft in $x = 4$, en bereken deze limiet.

b) Laat het rijtje $\langle y_n \rangle$ gedefinieerd zijn door

$$y_n = f\left(\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^2\right)$$

Bewijs dat y_n convergent is, en bepaal de limiet.