

Wat is wiskunde? A (WISB101) 2 januari 2002

- Schrijf uw naam en voorletters op elk vel.
- Schrijf op het eerste vel uw studienummer.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe u eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

SUCCESS!

a. Ga met behulp van waarheidstabellen na of de volgende beweringen een tautologie zijn:

(a) $[\neg P \wedge (Q \vee \neg R)] \longleftrightarrow [(\neg P \wedge Q) \vee \neg(P \vee R)],$

(b) $[(P \wedge \neg Q) \longrightarrow (R \wedge \neg R)] \longrightarrow (P \longrightarrow Q).$

b. Bewijs dat er geen natuurlijke getallen m en n bestaan zodat

$$\frac{9}{19} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

c. Laten A , B en C verzamelingen zijn, bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende twee beweringen:

(a) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A),$

(b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$

d. Bewijs met volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt:

$$\sum_{j=1}^n j(n-j) = \frac{n^3 - n}{6}.$$

N.B. Je mag hierbij gebruik maken van de formule $\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1)$, deze bewering hoeft je niet te bewijzen.

e. Laat R een relatie zijn op de verzameling A (dus $R \subseteq A \times A$).

(a) Toon aan dat $R \cap R^{-1}$ en $R \cup R^{-1}$ symmetrisch zijn.

(b) Toon aan dat als R transitief is dat dan ook R^{-1} transitief is.

f. Bewijs dat

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \text{er bestaat een geheel getal } k \text{ zodat } x - y = 7k\}$$

een equivalentie relatie definiëert op \mathbb{R} .