# Wat is wiskunde? (block 1, fall 2013)

## Solution to Exercise 1 of the exam

For $n \in \mathbb{N}$ we denote by $P(n)$ the statement

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

[2pt] base case: $P(1)$ is true, since

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}.$$

inductive step: Let $n \in \mathbb{N}$ and assume that $P(n)$ is true. We show that $P(n+1)$ is true: The inductive hypothesis implies that

$$\begin{aligned}
\text{[2pt]} \qquad \frac{1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}} &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
\text{[1pt]} \qquad &= 2 + \frac{-2(n+2) + n + 1}{2^{n+1}} \\
\text{[1pt]} \qquad &= 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Hence $P(n+1)$ true.

[3pt for logic in the inductive step]

[1pt] Hence by induction, $P(n)$ is true for every $n \in \mathbb{N}$.

**opgave 2**

Bewijs de volgende twee beweringen (elk 5 punten):

$$(a) \qquad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)\,,$$
$$(b) \qquad (A - B) - C \subseteq A - (B - C)\,.$$

**Oplossing.** $(a)$ Laat $X = A - (B \cap C)$ en $Y = (A - B) \cup (A - C)$. We gaan de equivalentie $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$ bewijzen. Neem eerst aan dat $x \in X$, d.w.z., $x \in A$ en $x \notin B \cap C$. Merk op dat $x \notin B \cap C$ hetzelfde betekent als $(x \notin B) \vee (x \notin C)$ (aangezien dit de ontkenning is van $(x \in B) \wedge (x \in C)$). Dus ($x \in A$ en $x \notin B$) of ($x \in A$ en $x \notin C$) (vanwege distributiviteit), dus $x \in A - B$ of $x \in A - C$, dus $x \in Y$. Omgekeerd, neem aan dat $x \in Y$, dus $x \in A - B$ of $x \in A - C$. Maar $x \in A - B$ betekent $x \in A$ en $x \notin B$, dus $x \in A$ en zeker $x \notin B \cap C$, dus $x \in X$, en op geheel analoge manier volgt $x \in X$ uit $x \in A - C$. Q.E.D.

$(b)$ Laat $V = (A - B) - C$ en $W = A - (B - C)$. We moeten bewijzen dat uit $x \in V$ volgt dat $x \in W$. Welnu, $x \in V$ betekent dat $x \in A - B$ en $x \notin C$; en $x \in A - B$ betekent dat $x \in A$ en $x \notin B$. Op analoge wijze zien we dat $B - C$ een deelverzameling van $B$ is. Uit $x \notin B$ volgt dus direct dat $x \notin B - C$. Uit $x \in A - B$ volgt dus al dat $x \in A - (B - C) = W$, zodat het zeker ook volgt uit $x \in V$ (we hebben niet nodig dat $x$ geen element van $C$ is). Q.E.D.

3a

| P | Q | R | P∧Q | ~( P∧Q) | ~R | ~( P∧Q)⇒R | (P∧Q) ∧~R | TOTAAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T | F | F |
| T | T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | F | T | F | F |
| T | F | F | F | T | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | F | T | F | F |
| F | T | F | F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | F | T | F | T | F | F |
| F | F | F | F | T | T | F | F | T |

Puntenverdeling
1 t/m 4$^e$ kolom samen **1 punt**
5$^e$ en 6$^e$ kolom samen **1 punt**
7$^e$, 8$^e$ , 9$^e$ kolom **1 + 1 + 1 punt**

3b
$A_1 = (-1, 1)$ of
$A_2 = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ of
$A_3 = (-\infty, 0] - \{-1\}$ of
$A_4 = [0, \infty) - \{1\}$ **(1 punt)**

Bewijs dat $f$ bijectief is op $A_1$. Voor de andere verzamelingen is het bewijs vergelijkbaar.
Een functie is bijectief als deze zowel injectief als surjectief is.
Een functie is injectief als $f(a) = f(b)$ impliceert dat $a = b$.
Stel $f(a) = f(b)$ voor $a, b \in (-1, 1)$. Hieruit volgt dat $\frac{a}{1-a^2} = \frac{b}{1-b^2} \Leftrightarrow a - ab^2 = b - a^2b$

$\Leftrightarrow -ab(a-b) = a-b$. Dus $ab = -1$ of $a-b = 0$. Maar $ab \in (-1, 1)$ , dus $a = b$.
Dus de functie $f$ is injectief. **(2 punten)**

De functie $f$ is surjectief als er voor elke $y \in$ P een $x \in (-1, 1)$ zodanig dat $f(x) = y$.
Geval 1: $y = 0$. Neem $x = 0$, dan $f(0) = 0$.

Geval 2: $y \neq 0$. Kies $x = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$. (De oplossing van $\frac{x}{1-x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 + x - y = 0$)

Merk op dat $x = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} \in (-1, 1)$, maar $x = \frac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y} \notin (-1, 1)$.

Als $x = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$, dan $x^2 = \frac{2-2\sqrt{1+4y^2}+4y^2}{4y^2}$ en

$$1 - x^2 = \frac{4y^2-(2-2\sqrt{1+4y^2}+4y^2)}{4y^2} = \frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y^2} = \frac{x}{y}$$

Er geldt nu: $f(x) = f(\frac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}) = \frac{x}{\frac{x}{y}} = y$. Dus de functie $f$ is surjectief.

Omdat $f$ injectief en surjectief is, is $f$ bijectief. **(2 punten)**

4.a) We tonen aan dat $R$ een equivalentierelatie is.

<u>Reflexiviteit</u>: Omdat $(w,x) = (1.w, 1.x)$, m.a.w. $\lambda = 1$, voor elke $(w,x) \in \mathbb{R}^2$ is $R$ reflexief.

<u>Symmetrie</u>: Stel $(w,x)\, R\, (y,z)$ dan bestaat er een $\lambda > 0$ zodat $(y,z) = (\lambda w, \lambda x)$, maar dan is $(w,x) = (\frac{1}{\lambda} y, \frac{1}{\lambda} z)$. Merk op als $\lambda > 0$ dan $\frac{1}{\lambda} > 0$

Dus geldt ook $(y,z)\, R\, (w,x)$

<u>Transitiviteit</u>: Stel $(w,x)\, R\, (y,z)$ en $(y,z)\, R\, (a,b)$ dan bestaan er dus $\lambda, \mu > 0$ (beide) zodat

$(y,z) = (\lambda w, \lambda x)$ en $(a,b) = (\mu y, \mu z)$ dus

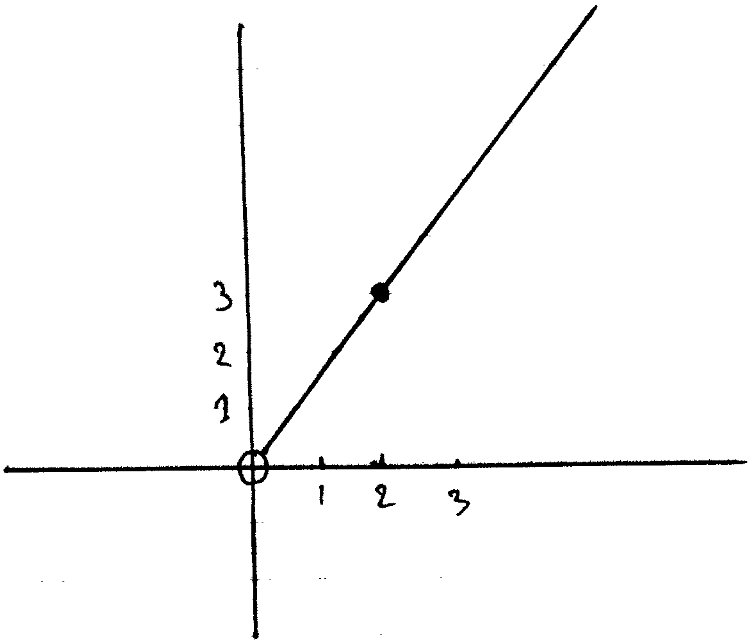
$(a,b) = (\lambda\mu w, \lambda\mu x)$ en omdat $\lambda, \mu > 0$ is $\lambda.\mu > 0$

Dus $R$ is ook transitief

Conclusie: $R$ is reflexief, symmetrisch en transitief, dus $R$ is een equivalentie relatie

b) De elementen die tot de klasse $[(2,3)]$ behoren zijn alle elementen van de vorm $(2\lambda, 3\lambda)$ voor $\lambda > 0$.

Dit is dus een halve rechte met $(0,0) \notin [(2,3)]$




c) Allereerst $[(0,0)] = \{(0,0)\}$.

de andere klassen zijn; voor $\varphi \in [0, 2\pi)$ :

$[(\cos\varphi, \sin\varphi)] = \{(\lambda\cos\varphi, \lambda\sin\varphi) : \lambda > 0\}$

Dit zijn alle klassen. Laat $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dan definieer $\lambda = \sqrt{x^2+y^2}$ dan bestaat er een unieke $\varphi \in [0, 2\pi)$ , als $\lambda \neq 0$ zodat $\cos\varphi = \frac{x}{\lambda}$ en $\sin\varphi = \frac{y}{\lambda}$. Namelijk als $x > 0$ dan $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ ; als $x < 0$ dan $\varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x}$; als $x = 0$ dan is $\varphi = \frac{\pi}{2}$, als $y > 0$ en $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ als $y < 0$.

Als $\lambda = 0$ dan is $(x,y) = (0,0)$ en dit element zit in $[(0,0)]$. Dus elk element behoort tot één ~~equivalen~~ van de beschreven equivalentie klassen,

Dit zijn ze dus allemaal.
Ze zijn ook allemaal verschillend. Immers laat $(x,y)$ een element zijn in de doorsnede van twee van die klassen. Merk allereerst op dat $(x,y) \neq (0,0)$ want $[(0,0)] \ni (0,0)$ maar $(0,0) \notin [(\cos\varphi, \sin\varphi)]$. Bereken weer $\lambda = \sqrt{x^2+y^2}$.
Stel nu $(x,y) \in [(\cos\varphi, \sin\varphi)] \cap [(\cos\psi, \sin\psi)]$
dan is $\frac{x}{\lambda} = \cos\varphi = \cos\psi$ en $\frac{y}{\lambda} = \sin\varphi = \sin\psi$
maar dan is $(\varphi = \psi$ of $\varphi = 2\pi - \psi)$ én:
$(\varphi = \psi$ of $\varphi = \pi - \psi$ (als $\psi \leq \pi$) of $\varphi = 3\pi - \psi$ (als $\psi > \pi$))
Dit geeft maar één oplossing namelijk.
$\varphi = \psi$. Met andere woorden alle klassen zijn disjunct

## Opgave 5

Merk op dat

$$g(1) \;=\; (1-1)^3 \cos 0 \;=\; 0$$

en $|\cos y\,| \leq 1$ voor alle $y \in \mathbb{R}$.

Gegeven $\varepsilon > 0$ kies $\delta := \min\{1, \varepsilon\}$, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $0 < |\,x-1\,| < \delta$ dat

$$\begin{aligned} |\,g(x) - g(1)\,| \;&=\; |\,(x-1)^3 \cos(x-1)\,| \;=\; |\,x-1\,|^3\,|\cos(x-1)\,| \\ &\leq\; |\,x-1\,|^3 \;<\; \delta^3 \;\leq\; 1^2\,\delta \;\leq\; \varepsilon\;. \end{aligned}$$

Dit betekent $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$ ofwel $g$ is continu in het punt $1 \in \mathbb{R}$.

**opgave 6**

Toon m.b.v. de $\epsilon$-$N$ definitie aan dat de reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

convergeert naar $\frac{4}{3}$.

**Uitwerking**

We moeten aantonen dat de rij $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ van partiële sommen convergeert naar $\frac{4}{3}$, waarbij $S_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ gedefinieerd is door $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\frac{1}{4}S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^j = S_n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^0$. Hieruit volgt: $\frac{1}{4}S_n = S_n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1$, oftewel, $S_n(1-\frac{1}{4}) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. Hieruit volgt: $S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

We gaan nu bewijzen dat de rij $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar $\frac{4}{3}$.

Zij $\epsilon > 0$. Kies $N = \max(1, \lceil -1 + \frac{\log\left(\frac{3}{4}\epsilon\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \rceil)$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ dat

$$|S_n - \tfrac{4}{3}| = |\tfrac{4}{3}\left(1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \tfrac{4}{3}| = | - \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1} | = \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1} <$$

$$\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\lceil -1 + \frac{\log\left(\frac{3}{4}\epsilon\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \rceil + 1} < \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{\log\left(\frac{3}{4}\epsilon\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)}} = \tfrac{4}{3}\left(e^{\log\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\log\left(\frac{3}{4}\epsilon\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)}} = \tfrac{4}{3}e^{\log\left(\frac{3}{4}\epsilon\right)} = \tfrac{4}{3}\tfrac{3}{4}\epsilon = \epsilon.$$

We hebben nu met de $\epsilon$-$N$ definitie aangetoond dat de reeks $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k}$ convergeert.