Uitwerking tentamen WSW 2 januari 2015.

1a

P	Q	R	$\sim P$	$\sim P \vee Q$ (A)	$Q \Rightarrow R$ (B)	$P \Rightarrow R$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

Omdat voor alle mogelijke waarden van P, Q en R de bewering $((\sim P \vee Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ altijd waar is, is deze bewering een tautologie.

1b We geven een contrapositief bewijs.

Bew. Stel x of y is even.

- Als x is even dan is $x = 2k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ dan is $xy^2 = 2ky^2 = 2(ky^2)$. Omdat $ky^2 \in \mathbb{Z}$ is xy^2 dus even.
- Als y is even dan is $y = 2k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ dan is $xy^2 = x(2k)^2 = 2(xk^2)$. Omdat $xk^2 \in \mathbb{Z}$ is dus xy^2 even.

Conclusie: als xy^2 oneven dan zowel x als y is oneven. $\square$

4a) $A_0 = \{(0,0)\}$, A_r is een cirkel met straal $\sqrt{r}$ voor $r>0$.
Dit is een partitie van $\mathbb{R}^2$: Immers

10 rmering

3p 1) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ behoort tot een A_r, namelijk $(x,y) \in A_{x^2+y^2}$ (merk op $x^2+y^2 \in [0,\infty)$)

3p 2) Stel $(x,y) \in A_r \cap A_s$ met $r \neq s$ dan is $r = x^2+y^2 = s$ tegenspraak! Dus $A_r \cap A_s = \emptyset$ voor $r \neq s$.

b) R wordt gedefinieerd door:
$(x,y)\,R\,(a,b) \iff x^2+y^2 = a^2+b^2$.
~~(Merk op dat voor deze R bovenstaande $A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r\}$ vormen de equivalentieklassen.) Stelling 8.4~~

Merk op dat voor deze relatie R de elementen van A_r voor vaste r allemaal aan elkaar gerelateerd zijn. Stelling 8.4 van het boek zegt dan dat R een equivalentie-relatie is omdat de $\{A_r\}$ een partitie van $\mathbb{R}^2$ vormen.

5 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 1.$

Bewijs Voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een N, namelijk $N = \lceil \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}+1} \rceil$ zodat als $n > N$

$\left| \frac{n^2+3}{n^2-1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2+3-(n^2-1)}{n^2-1} \right| = \left| \frac{4}{n^2-1} \right| < \left| \frac{4}{N^2-1} \right|$
$\leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}+1-1} = \varepsilon$ $\square$

2a $(A-B) \cap (A-C) = A-(B \cup C)$ (a)

<u>Bewijs</u> Stel $x \in (A-B) \cap (A-C)$ dan is ($x \in A$ en $x \notin B$) en ($x \in A$ en $x \notin C$), dus $x \in A$ en $x \notin B$ en $x \notin C$, dus $x \in A$ en $x \notin (B \cup C)$ afwel $x \in A-(B \cup C)$

Conclusie: $(A-B) \cap (A-C) \subseteq A-(B \cup C)$. (*)

Stel $x \in A-(B \cup C)$, dan is $x \in A$ en $x \notin B \cup C$ dus $x \in A$ en $x \notin B$ én $x \notin C$ dus $x \in A-B$ én $x \in A-C$ afwel $x \in (A-B) \cap (A-C)$

Conclusie: $A-(B \cup C) \subseteq (A-B) \cap (A-C)$ (**)

Uit (*) en (**) volgt (a) $\square$

2b $A \times (B-C) = (A \times B)-(A \times C)$ (b)

<u>Bewijs</u> Stel $(x,y) \in A \times (B-C)$ dan $x \in A$ én $y \in B-C$ afwel $x \in A$ en $y \in B$ en $y \notin C$ afwel $(x,y) \in A \times B$ en $(x,y) \notin A \times C$ afwel $(x,y) \in A \times B - A \times C$

Conclusie: $A \times (B-C) = (A \times B)-(A \times C)$ $\square$

"afwel" staat voor "$\Longleftrightarrow$".

3a $a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $a_3 = 7$ $a_4 = 10$

Vermoeden $a_n = 3n-2$.

<u>Bewijs</u> m.b.v het sterke principe van volledige inductie: $a_1 = 1 = 3 \cdot 1 - 2$ $a_2 = 4 = 3.2-2$.

Klopt voor a_1 en a_2.

Stel het is waar voor a_{n-2} en a_{n-1} met $n \geq 3$ dan is $a_{n-2} = 3(n-2)-2 = 3n-8$ en $a_{n-1} = 3n-5$

Dan is $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3n-5)-(3n-8) = 6n-10-3n+8 = 3n-2$ $\square$

<u>Dus</u> voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n = 3n-2$

6a. f, g injectief dan $g \circ f$ injectief
~~Bew~~ Bewijs: Stel $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ voor $a, b \in C$ dan is, omdat g is injectief, $f(a) = f(b)$ en omdat f injectief is geldt nu $a = b$. Conclusie $g \circ f$ is injectief. $\square$

6b. $g \circ f$ surjectief dan g surjectief
Bewijs: Omdat $g \circ f$ surjectief is er voor elke $c \in C$ een $a \in A$ zodat $g \circ f(a) = c$, maar dan is er ook een $b \in B$, namelijk $b = f(a)$ zodat $g(b) = g(f(a)) = c$.
Conclusie g is surjectief $\square$.

Normering opg 3

goede formule a_n 2p
bij inductie a_1 en a_2 gecontroleerd 2p
Rest van inductie bewijs i.h.b sterke inductie 6p.

Normering opg 5

limiet juist 2p
Keuze voor N goed 2p
rest van het bewijs 6p.