Uitwerking hertentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

2 januari 2014

(1a) We bekijken de eerste paar termen: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ etc. Dit zijn precies de oneven getallen. Dus het vermoeden is dat geldt dat $a_n = 2n - 1$.

(1b) We gebruiken dus het principe van sterke inductie. Voor a_1 en a_2 klopt de directe formule, want $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ en $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Dus de inductiebasis is bewezen.

Dan nu de inductiestap. Zij nu de directe formule gegeven voor alle natuurlijke getallen kleiner dan een gegeven $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 3$. Dan moet er nu bewezen worden dat de formule ook geldt voor n zelf. Aangezien $n - 1 < n$, weten we dat $a_{n-1} = 2(n-1) - 1 = 2n - 3$. En aangezien $n - 2 < n$, weten we ook dat $a_{n-2} = 2(n-2) - 1 = 2n - 5$. Daaruit kunnen we het volgende afleiden:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(2n-3) - (2n-5) = 4n - 6 - 2n + 5 = 2n - 1$$

Dus de formule geldt ook voor a_n, dus daaruit volgt de inductiestap. Dus nu is met het principe van sterke inductie bewezen dat de formule geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(2a) We werken met contrapositie. Stel dat $x \leq 0$. We willen dan bewijzen dat $x^4 + 1 > x^7 - x^2$.

Als geldt dat $x \leq 0$, dan geldt ook dat $x^7 \leq 0$ en er geldt sowieso dat $x^2 \geq 0$ en $x^4 \geq 0$. Hieruit volgt dat $x^4 + 1 \geq 1$ en dat $x^7 - x^2 \leq 0$. Dus hieruit volgt dat:

$$x^4 + 1 \geq 1 > 0 \geq x^7 - x^2$$

Hieruit volgt het gevraagde.

(2b) We werken wederom met contrapositie. Stel dat $n \not\equiv 2 \mod 3$. Dan geldt dus duidelijk dat $n \equiv 1 \mod 3$ of $n \equiv 0 \mod 3$. We gaan beide gevallen af om te laten zien dat $n^2 \equiv n \mod 3$.

Stel $n \equiv 0 \mod 3$. Dan geldt dus dat $n = 3l$ voor een bepaalde $l \in \mathbb{Z}$. Dan volgt daaruit dat $n^2 = (3l)^2 = 9l^2 = 3(3l^2)$. Dus er geldt dat $n^2 = 3k$ met $k = 3l^2$. Dus $n^2 \equiv 0 \mod 3$.

Stel dat $n \equiv 1 \mod 3$. Dan geldt dus dat $n = 3l + 1$ voor een bepaalde $l \in \mathbb{Z}$. Dan volgt daaruit dat $n^2 = (3l+1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$. Dus er geldt dat $n^2 = 3k + 1$ met $k = (3l^2 + 2l)$. Dus $n^2 \equiv 1 \mod 3$.

Hiermee is het gevraagde bewezen.

(3a) We noemen de gehele uitdrukking ϕ. Dan krijgen we de volgende tabel:

P	Q	R	$\sim(Q \vee R)$	$\sim(Q \vee R) \Rightarrow P$	$\sim P \wedge Q$	$(\sim P \wedge Q) \Rightarrow R$	ϕ
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0

(3b) Aangezien $A \neq \emptyset$, geldt dat $A \times B = \Leftrightarrow B = \emptyset$, en voor C geldt het zelfde. Dus dan geldt dat $B = \emptyset \Leftrightarrow C = \emptyset$. Dus we nemen vanaf hier aan dat B en C beide niet leeg zijn.

Stel nu dat $(x, y) \in A \times B$. Dan geldt dat $x \in A$ en $y \in B$. Aangezien $A \times B = A \times C$, geldt dus ook dat $(x, y) \in A \times C$, waaruit dan weer volgt dat $y \in C$. Dus er geldt dat $y \in B \Rightarrow y \in C$. Op eenzelfde manier is aan te tonen dat $y \in C \Rightarrow y \in B$. Dus daaruit volgt dan dat $B = C$.

Als $A = \emptyset$, dan hoeft dit verhaal niet op te gaan. Er geldt dat dan namelijk dat $A \times B = \emptyset$ en $A \times C = \emptyset$ voor willekeurige B en C. In het bijzonder geldt dus ook dat $A \times B = A \times C$ als B en C niet aan elkaar gelijk zijn.

(4a) We gaan de drie kenmerken van een equivalentierelatie af:

Er geldt dat $(a, a) \in R$ voor alle $a \in \mathbb{Z}$. Immers geldt voor $\lambda = 1$ dat $a = \lambda a$. Dus de relatie is reflexief.

Stel dat $(a, b) \in R$. Dan geldt dus dat er een λ is zodat $a = \lambda b$. Als we $\lambda' = 1/\lambda$ stellen, dan geldt dat $\lambda' \in \mathbb{Q}$ en dat $\lambda' > 0$ en dat $b = \lambda' a$. Dus dan geldt dat $(b, a) \in R$. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel dat $(a, b) \in R$ en $(b, c) \in R$. Dan zijn er dus λ en λ' zodat $a = \lambda b$ en $b = \lambda' c$. Bekijk dan $\lambda'' = \lambda \cdot \lambda''$. Dan geldt dat $\lambda'' \in \mathbb{Q}$ en $\lambda'' > 0$ en er geldt dat $a = \lambda b = \lambda \cdot \lambda' c = \lambda'' c$. Dus dan geldt dat $(a, c) \in R$. Dus de relatie is transitief.

Daarmee is bewezen dat R een equivalentierelatie is.

(4b) Allereerst moet opgemerkt worden dat [0]={0} een equivalentieklasse op zichzelf is. Immers, als $0 = \lambda b$ en $\lambda \neq 0$, dan geldt $b = 0$.

Verder geldt dat [1]=$\mathbb{N}_{>0}$. Dat volgt meteen uit het feit dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt dat voor $\lambda = n$ volgt dat $n = \lambda \cdot 1$. Dus $(n, 1) \in R, \forall n \in \mathbb{N}$.

Op dezelfde manier als hierboven volgt dat [-1] gelijk is aan alle negatieve getallen.

Aangezien $[-1] \cup [0] \cup [1] = \mathbb{Z}$, volgt dat die alle equivalentierelaties zijn. Verder is middels het verhaal hierboven ook duidelijk dat ze allemaal verschillend zijn.

(5) Aangezien de term $n^4 + n$ naar oneindig gaat als n naar oneindig gaat, is het vermoeden dat de rij convergeert naar 0. Dit laten we dan ook zien.

Zijn nu een $\epsilon > 0$ gegeven en stel $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. Dan geldt voor alle $n > N$ het volgende:

$$\left| \frac{1}{n^4 + n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^4 + n} \right| < \left| \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{1}{N} \right| \leq \epsilon$$

Daarmee is bewezen dat de rij naar 0 convergeert.

(6) Merk op dat we de limiet naar 1 nemen, en niet naar -1, dus de noemer is niet gelijk aan nul. Aangezien $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$, bestaat dus het vermoeden dat de limiet 0 zal zijn. Dit laten we dan ook zien.

Zij nu een $\epsilon > 0$ gegeven en stel $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{3})$Aangezien geldt dat $|x - 1| < 1$, geldt dat $0 < x < 2$, dus $|x + 1| < 3$.

$$\left| \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1} \right| =$$

$$\left| \frac{(x-1)(x+1)^2}{x + 1} \right| = |(x-1)(x+1)| = |(x-1)||(x+1)| < 3\delta \leq \epsilon$$

Hiermee is bewezen dat de limiet van de functie in het punt $x = 1$ bestaat.