WAT IS WISKUNDE (English version on the other side)
Maandag 5 november 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Gebruik voor iedere opgave een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. (**nieuw vel papier**) Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) (5 punten) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering:

   $(P \Leftrightarrow (P \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim(R \Leftrightarrow \sim Q))$.

   Oplossing

P	Q	R	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
T	T	T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F	T	F	F	T

   Met:
   (1) $P \wedge R$
   (2) $P \Leftrightarrow (P \wedge R)$
   (3) $\sim Q$
   (4) $\Leftrightarrow \sim Q$
   (5) $\sim (R \Leftrightarrow \sim Q)$
   (6) $P \vee Q$
   (7) $(P \vee Q) \wedge \sim (R \Leftrightarrow \sim Q)$
   (8) $(P \Leftrightarrow (P \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim (R \Leftrightarrow \sim Q))$

   Voor elke ontbrekende tussenkolom werd 1 punt afgetrokken, met een maximum van 3. Dus voor alleen het format van een waarheidstabel, met de juiste eindkolom, kreeg je 2 van de 5 punten.

   (b) (5 punten) Laat $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs de ongelijkheid $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Oplossing Dit volgt snel uit de driehoeksongelijkheid $|a+b| \leq |a|+|b|$ door voor a en b respectievelijk y en $x-y$ in te vullen: je krijgt $|x| \leq |y|+|x-y|$, oftewel $|x|-|y| \leq |x-y|$.

Zonder de driehoeksongelijkheid te gebruiken: gebruik het feit dat voor $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: als $a^2 \leq b^2$, dan $|a| \leq |b|$ (immers, $|a| = \sqrt{a^2}$). Omdat altijd geldt $xy \leq |xy| = |x||y|$ krijgen we:

$$(|x|-|y|)^2 = x^2 - 2|x||y| + y^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = |x-y|^2$$

Er volgt dat $||x|-|y|| \leq |x-y|$, dus $|x|-|y| \leq ||x|-|y|| \leq |x-y|$, als verlangd.

Het kon ook met gevalsonderscheiding. Onderscheid de volgende 6 gevallen:
1. $x \geq y \geq 0$: $|x-y| = x-y = |x|-|y|$
2. $x \geq 0 > y$: $|x-y| = x-y \geq x \geq x-|y| = |x|-|y|$
3. $0 > x \geq y$: $|x-y| \geq 0 \geq |x|-|y|$
4. $y > x \geq 0$: $|x-y| \geq 0 \geq |x|-|y|$
5. $y \geq 0 > x$: $|x-y| \geq |x| \geq |x|-|y|$
6. $0 > y \geq x$: $|x-y| = y-x = -x-(-y) = |x|-|y|$

2. (**nieuw vel papier**) Geef een collectie verzamelingen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ met de volgende drie eigenschappen: (1) $A_i \neq A_j$ als $i \neq j$; (2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$; (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Bewijs ieder van deze beweringen voor de door jouw gekozen collectie.

   Oplossing. Definieer $A_1 := \mathbb{Z}$, $A_2 := \{0\}$ en $A_n := \{0, 2^n\}$ voor natuurlijke getallen $n \geq 3$. Merk op dat

$$A_2 \subseteq A_n \subseteq A_1 \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

   (a) Heb $A_1 \neq A_n$ voor $n \neq 1$ omdat $\mathbb{Z}$ oneindig en A_n eindig voor $n \neq 1$. Heb $A_2 \neq A_n$ voor $n \geq 3$ omdat $|A_2| = 1$ en $|A_n| = 2$ voor $n \geq 3$. Blijft nog

$$i, j \geq 3 \text{ en } i \neq j \quad \Longrightarrow \quad A_i \neq A_j \ ;$$

   bewijs dit met contrapositie. Indien $\{0, 2^i\} = \{0, 2^j\}$ heb $2^i = 2^j$ (omdat $2^n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) en dus $i = j$.

   (b) Vanwege (1) is

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

   en dus gelijkheid overal, maar $A_1 = \mathbb{Z}$.

   (c) Vanwege (1) is

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_2 = A_2 \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

   en dus gelijkheid overal, maar $A_2 = \{0\}$.

3. (**nieuw vel papier**) Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Oplossing. Noem de gelijkheid hierboven $P(n)$. We beginnen de inductie met het bewijs dat $P(1)$ geldt. De linkerkant van de gelijkheid is $1 \cdot 3 = 3$, en de rechterkant is $\frac{1(1+1)(2+7)}{6} = 3$, dus $P(1)$ is bewezen.

Nu zetten we de inductiestap: we bewijzen dat $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ voor ieder natuurlijk getal k. De linkerkant van de gelijkheid in $P(k+1)$ is

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + k(k+2) + (k+1)(k+3).$$

Per inductie nemen we aan dat $P(k)$ geldt. Dat betekent dat we de som van de eerste k termen in deze uitdrukking kunnen vervangen door $\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$. Hiermee wordt de linkerkant van de gelijkheid $P(k+1)$ dus

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) &= (k+1)\frac{2k^2+7k+6k+18}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)}{6},\end{aligned}$$

en dit is de rechterkant van de gelijkheid $P(k+1)$.

Wegens het principe van volledige inductie concluderen we dus dat $\forall n : P(n)$.

4. (**nieuw vel papier**) (a) (4 punten) Bewijs dat

$$R = \{((w,x),(y,z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|,|x|) = \max(|y|,|z|)\}$$

een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}^2$. N.B. max staat voor het maximum,

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq b, \\ b & \text{als} \quad b > a. \end{cases}$$

Oplossing. Omdat $\max(|a|,|b|) = \max(|a|,|b|)$ geldt $(a,b)R(a,b)$ voor elk paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en is R dus reflexief.

Stel $(a,b)R(c,d)$ dan is $\max(|a|,|b|) = \max(|c|,|d|)$ en dus ook $\max(|c|,|d|) = \max(|a|,|b|)$ en geldt ook $(c,d)R(a,b)$ en is R dus symmetrisch.

Stel $(a,b)R(c,d)$ en $(c,d)R(e,f)$ Dan is $\max(|a|,|b|) = \max(|c|,|d|)$ en $\max(|c|,|d|) = \max(|e|,|f|)$ dus ook $\max(|a|,|b|) = \max(|c|,|d|) = \max(|e|,|f|)$ en geldt ook $(a,b)R(e,f)$ en is R dus ook transitief.

Omdat R reflexief, symmetrisch en transitief is, is R een equivalentie relatie op $\mathbb{R}^2$.

(b) (2 punten) Teken in het vlak $\mathbb{R}^2$ de equivalentieklasse van $(2,0)$.

Oplossing. Dit is een vierkant (alleen de randen) in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,2)$ en $(2,-2)$.

(c) (4 punten) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R.

Oplossing. Er zijn oneindig veel equivalentieklassen. Alle verschillende worden gegeven door $[(a,0)]$ met $a \in [0,\infty)$. Zo'n $[(a,0)]$ is een vierkant (alleen de rand) met hoekpunten $(-a,-a),(-a,a),(a,a)$ en $(a,-a)$, behalve als $a=0$ dan is $[(a,0)] = \{(0,0)\}$.

Neem $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, dan is $(a,b) \in [(\max(|a|,|b|),0)]$. Dus elke paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, zit in één van die equivalentieklassen.

Alle klassen zijn verschillend. Immers als $(a,b) \in [(c,0)]$ en $(a,b) \in [(d,0)]$ met $0 \leq c,d$ en $c \neq d$, dan is $c = \max(|a|,|b|) = d$ en dit is onmogelijk omdat $c \neq d$.

5. (**nieuw vel papier**) Bewijs dat de functie $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ gedefinieerd door $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ bijectief is.

Oplossing. Een functie is bijectief als de functie zowel injectief als surjectief is.
Een functie is injectief als $(f(a) = f(b))$ impliceert dat $a = b$.
Stel $f(a) = f(b)$ voor $a,\ b \in \mathbb{R} - \{2\}$. Hieruit volgt $\frac{2a}{a-4} = \frac{2b}{b-4} \Leftrightarrow 2a(b-4) = 2b(a-4) \Leftrightarrow 2ab - 8a = 2ba - 8b \Leftrightarrow -8a = -8b \Leftrightarrow a = b$. Dus de functie f is injectief.
De functie f is surjectief als er voor elke $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ een $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ is zodanig dat $f(x) = y$.
Zij $y \in \mathbb{R} - \{2\}$. Kies $x = \frac{4y}{y-2}$ (de oplossing van $\frac{2x}{x-4} = y$). Merk op dat $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ want de vergelijking $\frac{4y}{y-2} = 4$ heeft geen oplossingen en $x \in \mathbb{R}$. Er geldt nu inderdaad:
$f(x) = f(\frac{4y}{y-2}) = \frac{2\frac{4y}{y-2}}{\frac{4y}{y-2} - 4} = \frac{\frac{8y}{y-2}}{\frac{4y}{y-2} - \frac{4y-8}{y-2}} = \frac{8y}{8} = y$. Dus de functie f is surjectief.
Omdat f injectief en surjectief is, is f bijectief.

6. (**nieuw vel papier**) Toon m.b.v. de ϵ-δ definitie aan dat de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 3x^2 + 6x + (x+1)^2x^2$ continu is in $x = -1$. (N.B. Je mag hier geen rekenregels voor limieten gebruiken.)

Oplossing. We moeten bewijzen dat $\lim_{x\to-1} g(x)$ gelijk is aan $g(-1)$. Wegens $g(-1) = -3$ moeten we dus voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zien te vinden zodanig dat $|x+1| < \delta$ de afschatting $|g(x)+3| < \varepsilon$ impliceert. Er zijn meerdere keuzes voor δ mogelijk die allemaal tot de gewenste afschatting leiden; het onderstaande bewijs is dan ook slechts een van de vele mogelijke oplossingen.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven, en kies $\delta = \min(1, \sqrt{\varepsilon/7})$. Deze keuze is gemotiveerd door de factorisatie

$$g(x) + 3 = 3x^2 + 6x + 3 + (x+1)^2x^2 = (x+1)^2 \cdot (3 + x^2).$$

Zij $x \in \mathbb{R}$ met $|x+1| < \delta$. Wegens $\delta \leq 1$ geldt $-2 < x < 0$, waaruit $|3+x^2| < 3+2^2 = 7$ volgt. Uiteraard geldt ook $\delta \leq \sqrt{\varepsilon/7}$, waaruit $|x+1|^2 \leq \varepsilon/7$ volgt. Samenvattend zien we

$$|g(x)+3| = |x+1|^2 \cdot |3+x^2| < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon,$$

en hiermee is de continuïteit van g te $x = -1$ bewezen.

WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday November 5, 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper. On each (separate) sheet you should write your name and student number.
- The marks or grade points are equally distributed among the exercises. 10 points for each exercise.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to the usual basic principles, like e.g. the triangular inequality. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. (**new sheet of paper**) There is no relation between the two parts (a) and (b) of this exercise.

   (a) (5 points) Give a truth table for the following statement:

   $(P \Leftrightarrow (P \wedge R)) \vee ((P \vee Q) \wedge \sim (R \Leftrightarrow \sim Q))$.

   (b) (5 points) Let $x, y \in \mathbb{R}$. Prove the inequality $|x| - |y| \leq |x - y|$.

2. (**new sheet of paper**) Find an indexed collection of sets $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ that satisfies the following 3 properties: (1) $A_i \neq A_j$ if $i \neq j$; (2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$; (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Proof each of these statements for your collection.

3. (**new sheet of paper**) Prove using the principle of mathematical induction that for every $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

4. (**new sheet of paper**) (a) (4 points) Prove that the relation

$$R = \{((w, x), (y, z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|, |x|) = \max(|y|, |z|)\}$$

   on $\mathbb{R}^2$ is an equivalence relation. N.B. max means the maximum,

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{if} \quad a \geq b, \\ b & \text{if} \quad b > a. \end{cases}$$

   (b) (2 points) Draw in the plane $\mathbb{R}^2$ the equivalence class of $(2, 0)$.

   (c) (4 points) Describe all distinct equivalence classes of R.

5. (**new sheet of paper**) Prove that the function $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ defined by $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ is bijective.

6. (**new sheet of paper**) Give an ϵ-δ proof that the function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $g(x) = 3x^2 + 6x + (x+1)^2 x^2$ is continuous in $x = -1$. (N.B. You are not allowed to use fundamental properties of limits.)