Uitwerking tentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

3 november 2014

(1a) We gebruiken dus een waarheidstabel. We de gegeven uitspraak ϕ, dan ziet een waarheidstabel er als volgt uit:

P	Q	R	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$	$((\sim P) \vee (\sim Q)) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow P$	$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow R$	ϕ
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

(1b) We bewijzen beide inclusies en concluderen vervolgens dat de verzamelingen gelijk zijn.

Zij een element $x \in A - (A \cap B \cap C)$ gegeven. Dit betekent dat $x \in A$ en $x \notin A \cap B \cap C$, dus $x \notin B \cup C$. Dit laatste betekent dat x niet zowel een element van B als van C is. Dus $x \notin B$ of $x \notin C$. Stel dat $x \notin B$, dan geldt dat $x \in A$ en $x \notin B$, dus $x \in A - B$, dus ook $x \in (A - B) \cup (A - C)$. Stel dat $x \notin C$, dan geldt dat $x \in A$ en $x \notin C$, dus $x \in A - C$, dus ook $x \in (A - B) \cup (A - C)$. Dus we hebben altijd dat $x \in (A - B) \cup (A - C)$, dus we mogen concluderen dat $A - (A \cap B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$.

Zij nu een element y van $(A - B) \cup (A - C)$ gegeven. Dit betekent dat $y \in (A - B)$ of $y \in (A - C)$. Stel dat $y \in (A - B)$, dan hebben we dus dat $y \in A$ en $y \notin B$, dus dan hebben we ook dat $y \notin (A \cap B \cap C)$, omdat $A \cap B \cap C \subseteq B$, dus $y \in A - (A \cap B \cap C)$. Stel dat $y \in (A - C)$, dan hebben we dus dat $y \in A$ en $y \notin C$, dus dan hebben we ook dat $y \notin (A \cap B \cap C)$, omdat $A \cap B \cap C \subseteq C$, dus $y \in A - (A \cap B \cap C)$. Dus we hebben altijd dat $y \in A - (A \cap B \cap C)$, dus we mogen concluderen dat $(A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (A \cap B \cap C)$.

Dus we mogen nu zeggen dat $(A - B) \cup (A - C) = A - (A \cap B \cap C)$.

(2) We laten zien dat de functie g zowel injectief als surjectief is.

Zij $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ gegeven zodat $g(x) = g(y)$. Dit betekent dus dat:

$$\frac{3x}{x-5} = \frac{3y}{y-5}$$

We kunnen nu kruislings vermenigvuldigen, en dit geeft dat:

$$3x(y-5) = 3y(x-5)$$

Dit vereenvoudigen geeft dat $3xy - 15x = 3xy - 15y$, ofwel $-15x = -15y$ waaruit we mogen concluderen dat $x = y$. Dus g is injectief.

Dan nu surjectiviteit. Zij een $z \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gegeven. We zoeken nu een $r \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ zodat $g(r) = z$. We kiezen $r = \frac{15}{z-3} + 5$. Dit geeft namelijk:

$$g(r) = \frac{3r}{r-5} = \frac{3\left(\frac{15}{z-3} + 5\right)}{\left(\frac{15}{z-3} + 5\right) - 5} = \frac{\frac{3 \cdot 15}{z-3} + 15}{\frac{15}{z-3}} = \frac{3 \cdot 15}{z-3} \cdot \frac{z-3}{15} + 15 \cdot \frac{z-3}{15} = 3 + z - 3 = z$$

Dus dit bewijst dat g surjectief is.

Omdat g nu zowel injectief als surjectief is, mogen we concluderen dat g bijectief is.

(3a) We zien dat $a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$.

We zien vervolgens ook dat $a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

(3b) We gebruiken dus het sterke principe van inductie.

We bewijzen eerst de inductiebasis. Voor $n = 2$ hebben we dat $a_2 = 2$ en $3^{2-1} + (-1)^{2-1} = 3^1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$. Dus de formule klopt voor $n = 2$.

Stel nu dat de uitspraak klopt voor alle i zodat $2 \leq i \leq k$ voor een zeker natuurlijk getal k. We bewijzen nu de uitspraak voor $k+1$. We hebben sowieso dat $k \geq 2$, dus $k+1 \geq 3$. Hieruit volgt dat:

$$a_{k+1} = 2a_k + 3a_{k-1} = 2 \cdot (3^{k-1} + (-1)^{k-1}) + 3 \cdot (3^{k-2} + (-1)^{k-2}) =$$

$$2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} + 3 \cdot 3^{k-2} + 3 \cdot (-1)^{k-2} = 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} + 3^{k-1} - 3 \cdot (-1)^{k-1} =$$

$$3 \cdot 3^{k-1} - (-1)^{k-1} = 3^k + (-1)^k$$

Dus hiermee is de inductiestap ook voltooid.

We mogen dus met het sterke principe van volledige inductie concluderen dat $a_n = 3^{n-1} + (-1)^{n-1}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$.

(4) We bewijzen de drie eigenschappen van een equivalentierelatie.

Voor iedere $(i, j) \in \mathbb{Z}_4^2$ geldt dat $i + j = i + j$. Dus we hebben dat $((i, j), (i, j)) \in R$. Dus de relatie is reflexief.

Stel nu dat $((i, j), (k, l)) \in R$ voor zekere paren $(i, j), (k, l) \in \mathbb{Z}_4^2$. Dan geldt dus dat $i+j = k+l$. Dus ook dat $k + l = i + j$. Hieruit mogen we concluderen $((k, l), (i, j)) \in R$. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel nu dat $((i, j), (k, l)) \in R$ en dat $((k, l), (m, n)) \in R$ voor zekere functies $(i, j), (k, l), (m, n) \in \mathbb{Z}_4^2$. Dan geldt dus dat zowel $i + j = k + l$ als $k + l = m + n$, dus ook dat $i + j = m + n$. Hieruit mogen we concluderen dat $((i, j), (m, n)) \in R$. Dus de relatie is transitief.

Dus de relatie is een equivalentierelatie.

Het aantal verschillende equivalentieklasses is het aantal verschillende uitkomsten van de som $i + j$ met $i, j \in \mathbb{Z}_4$. Aangezien $\mathbb{Z}_4$ maar vier verschillende elementen heeft, zal het aantal equivalentie klasses maar hoogstens vier zijn. Het zijn er in totaal ook precies vier: $[(0, 0)]$, $[(0, 1)]$, $[(0, 2)]$ en $[(0, 3)]$.

Dit zijn daadwerkelijk alle equivalentieklasses. Voor iedere $i, j \in \mathbb{Z}_4$ hebben we immers dat $i+j \in \mathbb{Z}_4$. Dus $i+j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dit betekent dus dat ofwel $((i, j), (0, 0))$, ofwel $((i, j), (0, 1))$, ofwel $((i, j), (0, 2))$, ofwel $((i, j), (0, 3))$ een element is van R.

Ze zijn ook duidelijk allen verschillend. Laat $(i, j) \in [(0, m)]$ en $(k, l) \in [(0, n)]$ gegeven zijn, met $m \neq n$, dan hebben we dat $i + j = m \neq n = k + l$, dus $(i, j) \notin [(0, n)]$ en $(k, l) \notin [(0, m)]$.

(5) We laten met een ϵ, δ-bewijs zien dat $f(x)$ differentieerbaar is in het punt $x = -1$ en dat de afgeleide gelijk is aan 0. Dit laatste is te berekenen op de ouderwetse manier. We laten dit alleen dit nu ook op de ϵ, δ-manier zien.

Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{2})$.

Als we aannemen dat $|x + 1| < \delta$, hebben we sowieso dat $|x + 1| < 1$, dus $-1 < x + 1 < 1$, dus $-2 < x < 0$. Dus we hebben nu dat $|x| < 2$. Dit combineren met het feit dat $|x + 1| < \frac{\epsilon}{2}$ geeft:

$$\left|\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} - 0\right| = \left|\frac{|x|(x + 1)^2 - 0}{x + 1}\right| = ||x|(x + 1)| = |x||x + 1| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dus dit bewijst dat $f(x)$ differentieerbaar is in het punt $x = -1$.

(6) We bekijken de volgende collectie intervallen: $I_1 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ en $I_n = (0, \frac{1}{n})$ voor ieder natuurlijk getal $n \geq 2$.

We gaan de gegeven eigenschappen langs:

1. We hebben duidelijk dat $(0, \frac{1}{2}) \subsetneq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, dus $I_2 \subsetneq I_1$. Verder hebben we voor iedere $n \geq 2$ en $m > n$ dat $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$. Hieruit volgt dat $(0, \frac{1}{m}) \subsetneq (0, \frac{1}{n})$,dus dan hebben we ook dat $I_m \subsetneq I_n$. Dus deze intervallen voldoen aan de eerste eigenschap.
2. Aangezien voor iedere $n \geq 2$ geldt dat $I_n \subsetneq I_1$, hebben we dat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I_1 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Dus deze intervallen voldoen aan de tweede eigenschap.
3. We hoeven alleen maar te kijken naar elementen in het interval $(0, \frac{1}{2})$, aangezien elementen buiten dat interval überhaupt niet in I_2 zitten, dus ook niet in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
   Laat nu dus een element $x \in (0, \frac{1}{2})$. We laten nu zien dat er een $q \geq 2$ is zodat $x \notin I_q$. We weten dat er tussen x en 0 een rationaal getal zit, dus laat $\frac{p}{q}$ zo gegeven zijn dat $0 < \frac{p}{q} < x$. Dan hebben we ook dat $0 < \frac{1}{q} < x$. Dus in het bijzonder geldt dat $x \notin (0, \frac{1}{q})$. Dus $x \notin I_q$. En in het bijzonder geldt dan ook dat $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Hieruit mogen we dus concluderen dat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Dus de intervallen voldoen ook aan de derde eigenschap.

Dus de collectie intervallen I_n zoals gegeven voldoen aan alle drie de eigenschappen.