Uitwerking hertentamen "Wat is Wiskunde"

Bart Keller

22 december 2014

(1a) We noemen de gehele uitdrukking ϕ. Dan krijgen we de volgende tabel:

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$\sim (P \Leftrightarrow Q)$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	ϕ
1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1

(1b) We bewijzen eerst dat $|a+b| \leq |a| + |b|$ voor reële getallen a en b. Vanuit deze ongelijkheid kunnen we de gevraagde ongelijkheid afleiden. We weten het volgende vanuit de definitie van de absolute waarde:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Deze twee vergelijkingen kunnen we bij elkaar optellen met als resultaat dat:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

We weten echter ook, voor gegeven reële getallen c en d, dat $|c| \leq d \Leftrightarrow -d \leq c \leq d$. Dus we mogen concluderen dat:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

We vullen nu in deze laatste vergelijking waardes voor a en b in. We kiezen $a = y - z$ en $b = z - x$. We krijgen hierdoor:

$$|y - z + z - x| = |y - x| = |-(x+y)| \leq |y - z| + |z - x|$$

Dit is bijna de gevraagde ongelijkheid. Alleen aan de linkerkant staat nog net iets anders. Uit de definitie van de absolute waarde weten we echter dat $|-a| = |a|$ voor alle reële getallen a. Dus we mogen concluderen dat:

$$|x - y| \leq |y - z| + |z - x|$$

Dus daarmee is het gevraagde bewezen.

(2) We gebruiken dus het principe van inductie.

We laten eerst zien dat de uitspraak geldt voor $n = 1$. We kijken dan naar:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3^1 - 1}{2 \cdot 3^1}$$

Dus de formule klopt voor $n = 1$.

We nemen nu aan dat de formule klopt voor een zekere $n \in \mathbb{N}$. Dus we nemen aan dat voor deze n geldt dat:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}$$

We willen nu bewijzen dat de formule ook geldt voor $n + 1$. Eerst merken we op dat we het volgende kunnen doen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

Door de inductiehypothese weten we wat deze tweede som is. Daardoor kunnen we nu het volgende concluderen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k} &= \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} \\
&= \frac{2}{2 \cdot 3^{n+1}} + \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{3 \cdot 2 \cdot 3^n} \\
&= \frac{2}{2 \cdot 3^{n+1}} + \frac{3^{n+1} - 3}{2 \cdot 3^{n+1}} \\
&= \frac{3^{n+1} - 3 + 2}{2 \cdot 3^{n+1}} \\
&= \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Dus hiermee is het gevraagde ook bewezen voor $n + 1$, gegeven dat het gevraagde geldt voor n.

Met het principe van volledige inductie is nu bewezen datvoor eleke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n}$$

(3) We verzinnen eerst wat de limiet van deze rij zou moeten zijn. We weten dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$0 < \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

Aangezien we weten dat de rij $b_n = \frac{1}{n}$ naar nul gaat als n naar oneindig gaat, volgt hieruit dat a_n ook naar nul zal convergeren. Dat laten we nu formeel zien met een ϵ-N-bewijs.

Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen nu $N = \max(1, \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil)$. Door deze keuze kunnen we concluderen dat voor alle $n \geq N$ geldt dat:

$$\left| \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} \right| < \left| \frac{1}{2^n} \right| \leq \left| \frac{1}{2^N} \right|$$

Nu wordt de keuze van N verantwoord. Als er nu geldt dat $\epsilon \geq \frac{1}{2}$, dan geldt dat $\log_2(\epsilon) \geq -1$. Dus dan weten we dat $\lceil -\log_2(\epsilon) \rceil \leq 1$. Dus dan kiezen we $N = 1$. Dat geeft dan:

$$\left| \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} \right| < \left| \frac{1}{2^n} \right| \leq \left| \frac{1}{2^N} \right| = \frac{1}{2} < \epsilon$$

Als er echter geldt dat $\epsilon < \frac{1}{2}$. Dan weten we dat $\log_2(\epsilon) < -1$. Dus dan weten we dat $\lceil -\log_2(\epsilon) \rceil > 1$. Dus dan kiezen we $N = \lceil -\log_2(\epsilon) \rceil$. Dit geeft ons vervolgens dat:

$$\left| \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} \right| < \left| \frac{1}{2^n} \right| \leq \left| \frac{1}{2^N} \right| \leq \left| \frac{1}{2^{-\log_2(\epsilon)}} \right| = 2^{\log_2(\epsilon)} = \epsilon$$

Dus zo hebben we bewezen dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een N bestaat zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $\left| \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} \right| < \epsilon$.

(4) We bewijzen eerst de drie eigenschappen van een equivalentierelatie.

Gegeven een paar (i, j) met $i, j \in \mathbb{Z}$. Dan geldt duidelijk dat $(i, j)R(i, j)$ aangezien $i = i$. Dus de afbeelding is reflexief.

Stel nu dat $(i, j)R(k, l)$ voor zekere paren $(i, j), (k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Dan geldt dus dat $i = k$, en dus dat $k = i$. Daaruit kunnen we dan concluderen dat $(k, l)R(i, j)$. Dus de relatie is symmetrisch.

Stel nu dat $(i, j)R(k, l)$ en dat $(k, l)R(m, n)$ voor zekere paren $(i, j), (k, l), (m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Dan geldt dus dat $i = k$ en $k = m$. Aangezien dus geldt dat $i = k = m$ kunnen we zeggen dat $i = m$ dus geldt dat $(i, j)R(m, n)$. Daarmee is bewezen dat de relatie ook transitief is.

Dus de relatie is een equivalentierelatie.

De equivalentieklasse $[(0, 0)]$ bestaat dus uit alle getallenparen waarvan het eerste getal een 0 is. Anders gezegd: $[(0, 0)] = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$.

Dit geldt ook voor de rest van de gehele getallen. De verzameling $\{(i, n) | n \in \mathbb{Z}\}$ is voor iedere $i \in \mathbb{Z}$ een equivalentieklasse van R. Iedere equivalentieklasse van R ziet er zo uit en dit zijn ze ook allemaal. We weten bijvoorbeeld dat $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{(i, n) | n \in \mathbb{Z}\} = \{(i, n) | i, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$. Ze zijn ook allemaal strikt verschillend. Stel bijvoorbeeld dat (i, j) zowel in $[(k, l)]$ als in $[(m, n)]$ zit. Dan geldt dat $i = k$ en $i = m$, dus $k = m$ waaruit volgt dat $[(k, l)] = [(m, n)]$. Dus er geldt dat $k \neq m \Leftrightarrow [(k, l)] \neq [(m, n)]$.

We mogen dus concluderen dat voor iedere $i \in \mathbb{Z}$ de verzameling $\{(i, n)|n \in \mathbb{Z}\}$ een equivalentieklasse van R definieert, dat iedere equivalentieklasse zo geschreven kan worden en dat voor ze allemaal verschillend zijn voor verschillende i.

(5) We kijken eerst welke waarde f aanneemt in het punt $x = -1$. Invullen geeft:

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

We geven nu een ϵ-δ-bewijs dat f ook continu is in het punt $x = -1$.

Zij een $\epsilon > 0$ gegeven. We kiezen $\delta = \min(1, \frac{5}{3}\epsilon)$. Dan geldt voor alle x zodat $0 < |x + 1| < \delta$ dat $|x+1| < 1$, dus $-1 < x+1 < 1$ waaruit we mogen concluderen dat $-3 < x-1 < -1 < 3$. Dus $|x - 1| < 3$ als $|x + 1| < \delta$.

Ook kunnen we zeggen dat $-1 < x + 1 < 1$ impliceert dat $-2 < x < 0$, dus $x^2 < 4$ en $x^2 + 1 < 5$.

We kunnen nu bewijzen dat voor alle x zodat $0 < |x + 1| < \delta$ geldt dat:

$$|f(x)-f(-1)| = \left|\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right| = \left|\frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2 + 1}\right| = \frac{|(x + 1)(x - 1)|}{x^2 + 1} = \frac{|(x - 1)|}{x^2 + 1}|(x+1)| < \frac{3}{5}\delta = \epsilon$$

Dus daarmee is bewezen dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat $0 < |x + 1| < \delta$ impliceert dat $f(x) - f(-1) < \epsilon$. Dus f is continu in het punt $x = -1$.

(6a) We laten eerst zien dat $\sqrt{2}$ een twee-algebraïsch getal is. Daarvoor kiezen we $l_0 = -2$, $l_1 = 0$ en $l_2 = 1$. Zo wordt de vergelijking gelijk aan $-2 + x^2 = 0$ ofwel $x^2 = 2$ en $\sqrt{2}$ is hier een oplossing van. Aangezien $l_1^2 + l_2^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \neq 0$, geldt dus dat $\sqrt{2}$ een twee-algebraïsch getal is.

We bewijzen nu hetzelfde voor een gegeven $x \in \mathbb{Q}$. We bekijken eerst het aparte geval dat $x = 0$. In dat geval kiezen we $l_0 = 0$, $l_1 = 1$ en $l_2 = 0$. Dan is de vergelijking dus gelijk aan $x = 0$ en dan is nul zeker een oplossing. Aangezien $l_1^2 + l_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1 \neq 0$, geldt dat 0 een twee-algebraïsch getal is. Dan nu voor algemene $x \in \mathbb{Q}$. We kunnen x schrijven als $\frac{p}{q}$. We kiezen vervolgens $l_0 = -p$, $l_1 = q$ en $l_2 = 0$. Dan wordt de vergelijking $-p + qx = 0$ ofwel $qx = p$. Van deze vergelijking is $x = \frac{p}{q}$ zeker een oplossing. Dus x is een twee-algebraïsch getal voor iedere $x \in \mathbb{Q}$.

Aangezien $\mathbb{Q}$ oneindig veel elementen bevat en $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$, mogen we hieruit concluderen dat $\mathbb{A}$ ook oneindig veel elementen bevat.

(6b) Vanuit onderdeel ($6a$) weten we al dat $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{A}$. We zullen nu laten zien dat er een surjectieve afbeelding bestaat van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{A}$.

We gebruiken de volgende afbeelding Φ die van de verzameling $\mathbb{Z}^3 \times \{1,2\}$ gaat naar $\mathbb{A}$:

$$\Phi(l_0, l_1, l_2, 1) = \begin{cases} x_1 & \text{als de vergelijking } l_0 + l_1 x + l_2 x^2 = 0 \text{ twee oplossingen heeft en } x_1 \leq x_2 \\ x_1 & \text{als de vergelijking } l_0 + l_1 x + l_2 x^2 = 0 \text{ een enkele oplossing heeft} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$\Phi(l_0, l_1, l_2, 2) = \begin{cases} x_2 & \text{als de vergelijking } l_0 + l_1 x + l_2 x^2 = 0 \text{ twee oplossingen heeft en } x_1 \leq x_2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Merk op dat het geval dat $l_1 = l_2 = 0$ gedekt is in de bovenstaande gevallen, aangezien de vergelijking $l_0 + l_1 x + l_2 x^2 = 0$ dan oneindig veel of nul oplossingen heeft, en dan zal de afbeelding het tupel naar nul sturen.

De afbeelding is nu defefinieerd voor ieder element van $\mathbb{Z}^3 \times \{1,2\}$. De afbeelding is ook surjectief. Zij namelijk een getal $a \in \mathbb{A}$ gegeven. Dan zijn er dus l_0, l_1 en l_2 zodat $l_0 + l_1 a + l_2 a^2 = 0$. Als a de enige oplossing van deze vergelijking is, dan geldt dat $\Phi(l_0, l_1, l_2, 1) = a$ per constructie. Als er nog een oplossing b is van deze vergelijking, dan geldt dat $\Phi(l_0, l_1, l_2, 1) = a$ als $a \leq b$ en $\Phi(l_0, l_1, l_2, 2) = a$ als $a > b$. Dus in ieder geval zal a worden bereikt door Φ.

We weten dankzij het bestaan van deze afbeelding nu dat $|A| \leq |\mathbb{Z}^3 \times \{1,2\}| = |\mathbb{N}|$. We wisten dus ook al dat $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{A}|$, dus met behulp van de stelling van Cantor-Schröder-Bernstein mogen we concluderen dat $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$.

(6c) We weten dat de $|\mathbb{R}|$ strikt groter is dan $|\mathbb{N}|$. Dus er geldt ook dat $|\mathbb{R}| > |\mathbb{A}$. Dat betekent dat er geen enkele surjectieve afbeelding bestaat van $\mathbb{A}$ naar $\mathbb{R}$. In het bijzonder is de inbeddingfunctie die ieder element naar zichzelf stuurt ook niet surjectief. Dat houdt dus in dat er een element in $\mathbb{R}$ zit dat niet in $\mathbb{A}$ zit. Dus er is een reëel getal dat niet twee-algebraïsch is.